CAPITOLUL 2

SEMNALE ȘI SISTEME DISCRETE

2.1. Semnale discrete

După cum a fost precizat în capitolul 1, un semnal discret, $x[n]$, este o funcție a cărei variabilă independentă este un întreg și poate lua orice valoare reală sau complexă.

Este de remarcat că un semnal discret nu este definit la momente dintre două eșantioane succesive și este greșit a considera că semnalul $x[n]$ este egal cu zero pentru valori neîntregi ale variabilei independente.

Obișnuit, $x[k]$ definește al k-lea eșantion al semnalului $x[n]$, indiferent dacă acesta provine din eșantionarea unui semnal analogic sau nu.

Un exemplu de semnal discret este reprezentat în figura 2.1.

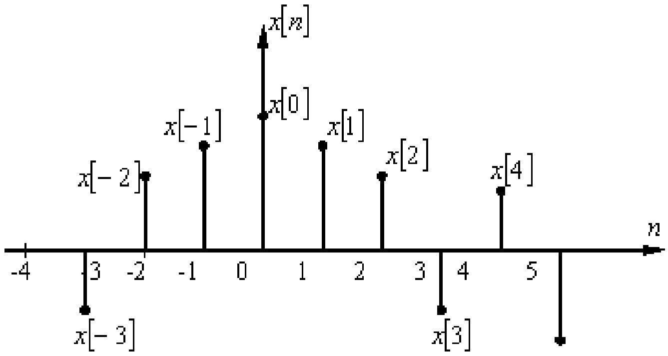

Figura 2.1. Reprezentarea grafică a unui semnal discret

Pe lângă reprezentarea grafică a unui semnal discret, mai există câteva moduri de descriere a acestora, care uneori sunt mai convenabile:

1. Reprezentarea funcțională, de exemplu

$$x[n]=\begin{cases} n, & n=1,2,3,4,5 \\ 4, & n=6 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad (2.1)$$

2. Reprezentarea tabelară, de exemplu

n	---------- -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 --------
$x[n]$	--------- 0 0 0 1 4 $\sqrt{2}$ 0 0 0 ---------

3. Reprezentarea prin secvențe de numere

O secvență infinită, cu originea timpului marcată prin (↑) este reprezentată sub forma

$$x[n]=\{...0, \underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1, 0, 0...\} \qquad (2.2)$$

O secvență $x[n]$ ale cărei valori sunt nule pentru $n < 0$, se reprezintă sub forma

$$x[n]=\{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1, 0, 0...\} \qquad (2.3)$$

În acest caz, originea timpului este primul element din stânga al secvenței și marcarea sa este opțională.

O secvență discretă de durată finită se reprezintă ca

$$x[n]=\{3, -1, \underset{\uparrow}{-2}, 5, 0, 4, 1\} \qquad (2.4)$$

unde (↑) reprezintă originea timpului, adică $x[0]$.

2.1.1. Câteva semnale discrete elementare

În prelucrarea numerică a semnalelor intervin adesea câteva semnale de bază, care vor fi definite după cum urmează:

1. *Semnalul impuls unitate*, care este descris de

$$\delta[n]=\begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad (2.5)$$

și este reprezentat în figura 2.2.

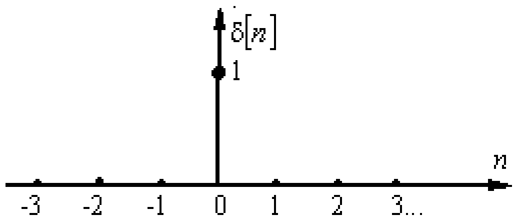

Figura 2.2. Reprezentarea grafică a impulsului unitate

Impulsul unitate joacă același rol ca distribuția Dirac din cazul semnalelor definite în timp continuu, dar, spre deosebire de aceasta, δ[n] este o funcție obișnuită, nu o distribuție. O secvență arbitrară, cum este cea din figura 2.1, poate fi reprezentată ca o sumă de impulsuri ponderate și întârziate

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \;, k \in Z \qquad (2.6)$$

2. *Semnalul treaptă unitate*, notat $u[n]$, este definit de

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \in N \\ 0, & in \;\; rest \end{cases} \qquad (2.7)$$

și este reprezentat în figura 2.3.

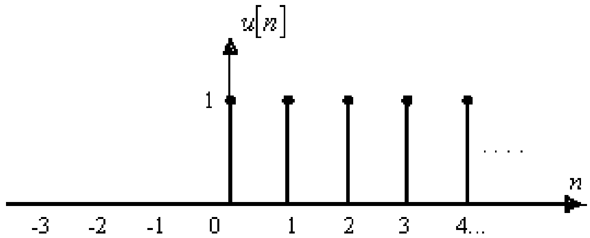

Figura 2.3. Reprezentarea grafică a treptei unitate

Legătura între treapta unitate și impulsul unitate este dată de relația

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k], \; k \in Z \qquad (2.8)$$

care arată că valoarea treptei unitate la momentul n rezultă prin acumularea valorilor precedente ale impulsului unitate.
O altă reprezentare a treptei unitate este dată de suma de impulsuri unitate întârziate

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k], \; n, k \in Z \qquad (2.8')$$

Impulsul unitate poate fi reprezentat ca

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \qquad (2.9)$$

3. *Semnalul rampă unitate*, notat uzual cu $u_r[n]$ și definit de

$$u_r[n] = \begin{cases} n, & n \in N \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \qquad (2.10)$$

este reprezentat în figura 2.4.

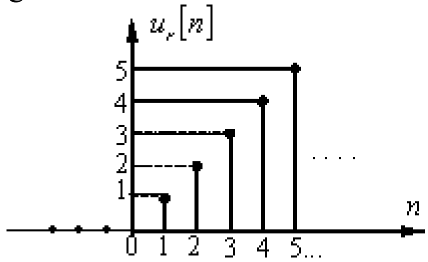

Figura 2.4. Reprezentarea grafică a semnalului rampă unitate

4. *Semnalul exponențial*, definit de

$$x[n] = a^n \text{, pentru } n\varepsilon\, Z \qquad (2.11)$$

Pentru $a \in \Re$, $x[n]$ este real și este reprezentat în figura 2.5 pentru diferite valori ale lui *a*.

Dacă parametrul *a* este complex, atunci se poate scrie

$$a = r \cdot e^{j\omega_0} \qquad (2.12)$$

unde *r* și ω_0 reprezintă modulul, respectiv faza mărimii complexe *a*. În acest caz

$$x[n] = r^n e^{j\omega_0 n} = r^n(\cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n) \qquad (2.13)$$

Deoarece $x[n]$este complex, se poate reprezenta grafic partea sa reală

$$x_R[n] = r^n \cos\omega_0 n \qquad (2.14)$$

ca funcție de *n* și, de asemenea, partea sa imaginară

$$x_I[n] = r^n \sin\omega_0 n \qquad (2.15)$$

tot ca funcție de *n*.

Pentru un semnal complex discret $x[n]$ se mai poate reprezenta uneori numai modulul

$$|x[n]| = r^n, \qquad (2.16)$$

de asemenea, ca funcție de *n*.

Semnalul exponențial poate fi scris ca o sumă de funcții sinus și cosinus ponderate exponențial, iar o secvență sinusoidală ca o sumă de exponențiale.

Se observă că partea reală și imaginară a lui $e^{j\omega_0 n}$ variază sinusoidal cu n. Faptul că n este întotdeauna întreg conduce la diferențe importante între proprietățile secvențelor exponențiale complexe și sinusoidale discrete și continue. Pentru a păstra analogia cu cazul analogic, ω_0 reprezintă pulsația sinusoidei complexe și se măsoară în radiani/eșantion, iar n – numărul de eșantioane.

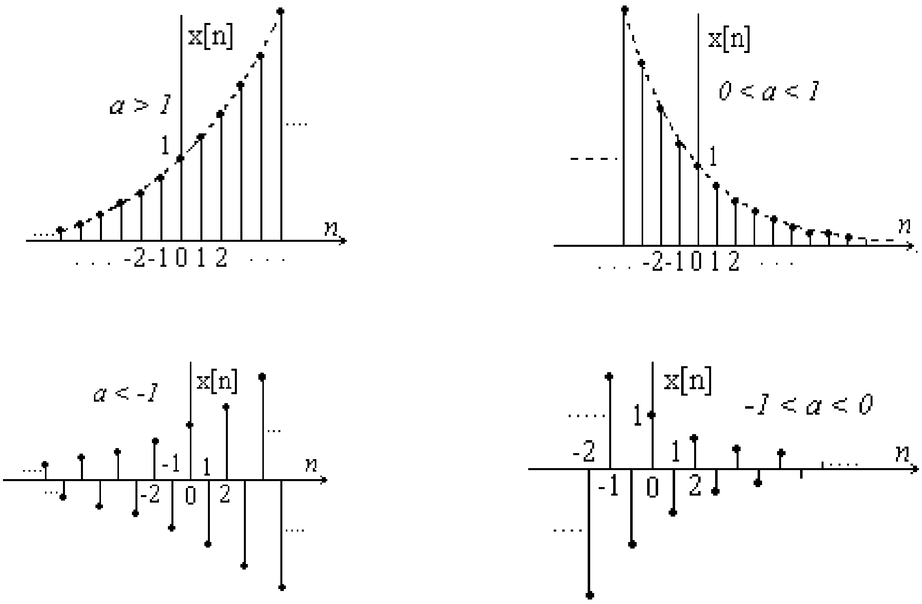

Figura 2.5. Reprezentarea grafică a semnalului exponențial pentru diverse valori ale lui a

Exponențialele complexe sau sinusoidele discrete sunt periodice de perioadă 2π, deci va fi necesară numai considerarea pulsațiilor din domeniul fundamental $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ sau $0 \leq \omega_0 < 2\pi$.

2.2. Clasificarea semnalelor discrete

2.2.1. Semnale de energie finită și semnale de putere finită

Energia unui semnal se definește cu relația

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \tag{2.17}$$

Această mărime poate fi calculată atât pentru semnale reale, cât și pentru semnale complexe. Dacă mărimea E, definită de (2.17) este finită, semnalul se numește de *energie finită*.

Puterea medie a unui semnal discret $x[n]$ se definește cu relația

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \qquad (2.18)$$

Dacă se definește energia unui semnal pe un interval finit $-N \le n \le N$, ca fiind

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \qquad (2.19)$$

atunci, energia sa se poate exprima ca

$$E \equiv \lim_{N\to\infty} E_N \qquad (2.20)$$

și puterea sa medie

$$P \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_N \qquad (2.21)$$

Evident, dacă E este finit, P = 0. Pe de altă parte, dacă energia unui semnal este infinită, puterea poate fi finită sau infinită. Dacă puterea este finită (și diferită de zero) semnalul se numește de *putere finită*.

Exemplul 2.1.

Să se determine puterea semnalului treaptă unitate. Pentru treapta unitate, puterea este

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} u^2(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2},$$

deci treapta unitate este un semnal de putere finită. Din expresia energiei se observă că pentru acest semnal energia este infinită.

Cu definițiile anterioare, rezultă că semnalul rampă unitate, definit de (2.10), nu este nici de putere, nici de energie finită.

2.2.2. Semnale periodice și neperiodice

Un semnal $x[n]$ este periodic, de perioadă N dacă și numai dacă

$$x[n \pm N] = x[n], \text{ pentru } \forall\ n\ \varepsilon\, \mathrm{Z} \quad \text{N întreg} \qquad (2.22)$$

Cea mai mică valoare pozitivă a lui N pentru care relația (2.22) este îndeplinită se numește *perioadă fundamentală*.

Dacă nu există nici o valoare pentru N care să satisfacă relația (2.22), semnalul se numește *neperiodic* sau *aperiodic*.

Energia unui semnal periodic este finită pe o perioadă, $0 \le n \le N-1$, dacă $x[n]$ ia valori finite în acest interval. Energia semnalelor periodice, pentru $-\infty < n < \infty$, este infinită. Puterea medie a semnalelor periodice este finită și este egală cu puterea medie pe o perioadă, dacă valorile semnalului în acest interval sunt finite.

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2 \tag{2.23}$$

Evident, semnalele periodice ce pot lua numai valori finite sunt de putere finită.

2.2.3. Semnale pare (simetrice) și impare (antisimetrice)

Un semnal real $x[n]$ este par, dacă

$$x[-n] = x[n] \tag{2.24}$$

și impar, dacă

$$x[-n] = -x[n] \tag{2.25}$$

Se observă că pentru semnale impare $x[0] = 0$.

În figura 2.6 sunt prezentate două semnale, unul par (a) și unul impar (b).

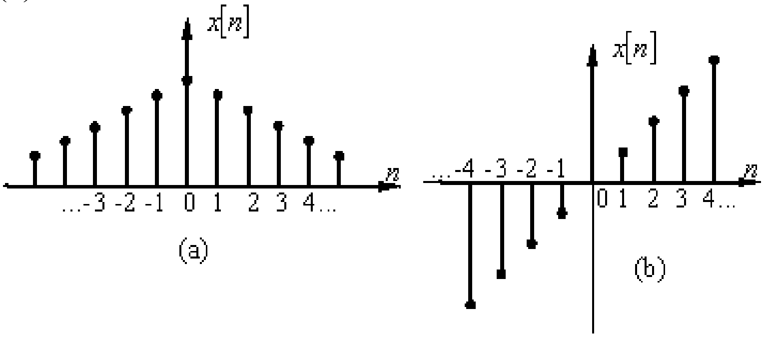

Figura 2.6. Exemple de semnal par (a) și impar (b)

Orice semnal discret $x[n]$ poate fi exprimat ca suma a două componente, una pară și una impară. Într-adevăr, dacă se definește

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] + x[-n]\right] \tag{2.26}$$

unde $x_e[n]$ satisface condiția de simetrie (2.24) și

$$x_o[n] = \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]] \tag{2.27}$$

unde $x_o[n]$ satisface relația (2.25), rezultă

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \tag{2.28}$$

2.3. Operații simple cu semnale discrete

În acest paragraf vor fi considerate câteva operații simple efectuate asupra variabilei independente și a amplitudinii semnalului discret.

Transformări ale variabilei independente

Deplasarea în timp a semnalului. Un semnal $x[n]$ poate fi deplasat în timp prin înlocuirea variabilei independente *n* cu $n-k$, unde $k \in Z$. Pentru $k > 0$, deplasarea în timp are ca rezultat o întârziere a semnalului cu *k* unități de timp. Dacă $k < 0$, deplasarea în timp determină un avans al semnalului cu $|k|$ unități de timp.

Exemplul 2.2.

Fie semnalul $x[n]$ reprezentat în figura 2.7.*a*. Să se reprezinte semnalele $x[n-3]$ și $x[n+2]$. Semnalele $x[n-3]$ și respectiv $x[n+2]$ sunt reprezentate în figurile 2.7.*b* și 2.7.*c*.

Dacă semnalul $x[n]$ este stocat pe un mediu oarecare este relativ simplu de a modifica originea timpului prin introducerea unei întârzieri sau a unui avans. Dacă, însă, semnalul este generat de un fenomen fizic ce se desfășoară în timp real, nu este posibilă realizarea unui avans, deoarece acest lucru implică eșantioane ce nu au fost încă generate.

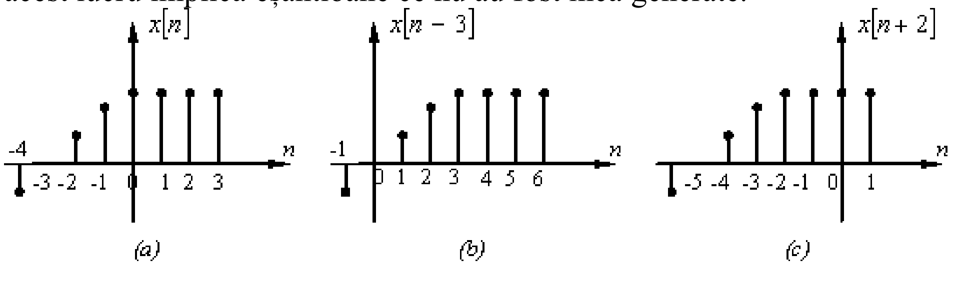

Figura 2.7. Reprezentarea grafică a semnalului $x[n]$ – *(a)*, a versiunii sale întârziate cu 3 unități – *(b)* și în avans cu 2 unități – *(c)*

Reflectarea semnalului. O altă modificare a variabilei independente, necesară în aplicații, este aceea de a înlocui variabila *n* cu –*n*, operație numită *reflectare* (folding) a semnalului în raport cu axa ordonatelor. Această operație este ilustrată în figura 2.8.

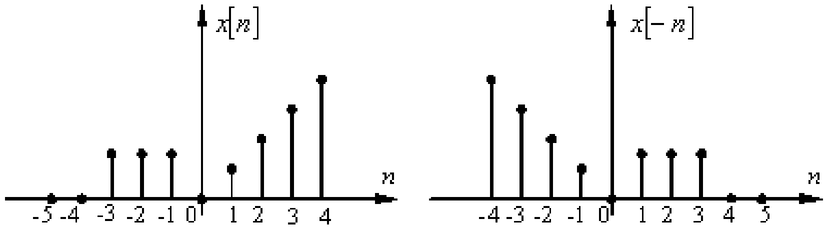

Figura 2.8. Ilustrarea grafică a operației de reflectare

Multe din operațiile realizate în PNS implică reflectarea și deplasarea în timp. Operațiile de reflectare și deplasare în timp nu sunt comutative.

Dacă se notează operația de deplasare în timp cu TD și cea de reflectare cu TF, se poate scrie

$TD_k[x[n]] = x[n-k], k > 0$

$TF[x[n]] = x[-n]$

$TD_k\{TF[x[n]]\} = TD_k[x[-n]] = x[-n+k]$

în timp ce

$TF\{TD_k[x[n]]\} = TF[x[n-k]] = x[-n-k]$

Exemplul 2.3.

Fie semnalul $x[n]$ reprezentat în figura 2.9. Să se reprezinte semnalul obținut prin reflectarea și deplasarea spre dreapta cu 2 unități a semnalului $x[n]$, precum și cel obținut prin deplasarea spre dreapta cu 2 unități și apoi reflectarea semnalului $x[n]$.

Soluție. În figura 2.9 s-au reprezentat semnalele $x_1[n] = x[-n]$, adică $x[n]$ reflectat, $x_2[n] = x[-n+2]$, adică $x[n]$ reflectat și deplasat 2 unități spre dreapta, $x_3[n] = x[n-2]$, adică $x[n]$ deplasat cu 2 unități spre dreapta și $x_4[n] = x[-n-2]$, adică $x[n]$ deplasat 2 unități spre dreapta și apoi reflectat.

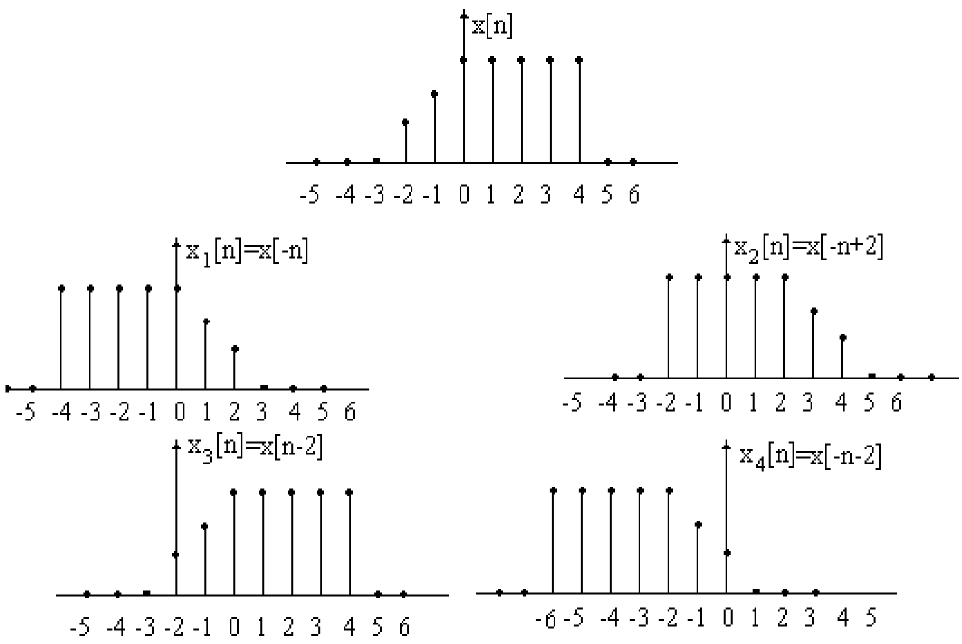

Figura 2.9. Ilusrarea necomutativității operațiilor de deplasare în timp și reflectare

Decimarea semnalului. Operația de decimare a semnalului constă în înlocuirea variabilei independente n cu Mn, unde $M \in N$, adică

$$x_{M\downarrow}[n] = x[Mn] \tag{2.29}$$

Această operație se mai numește de *scalare a axei timpului* sau *subeșantionare* și este ilustrată în figura 2.10a, pentru M=2.

Semnalul $x_{2\downarrow}[n] = x[2n]$ are o "derulare" mai rapidă decât $x[n]$.

Interpolarea semnalului. Operația de interpolare conduce la obținerea unui semnal cu "derulare mai lentă", dat de relația

$$x_{L\uparrow}[n] = \begin{cases} x\left[\dfrac{n}{L}\right], \text{daca L divide pe n}, L \in N \\ \qquad 0, \text{în rest} \end{cases} \tag{2.30}$$

prin introducerea a L-1 valori nule între două eșantioane consecutive ale semnalului $x[n]$. Această operație este ilustrată în figura 2.10b, pentru L=2.

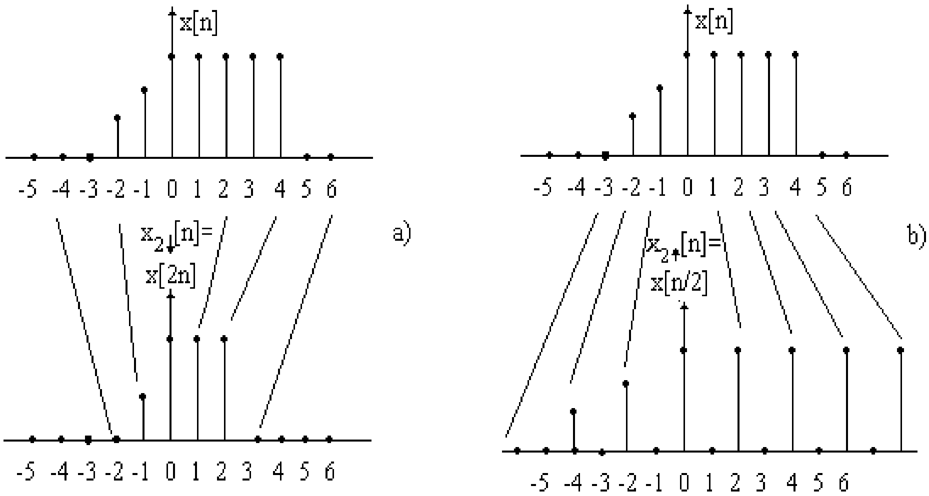

Figura 2.10. Ilustrarea operațiilor de a) decimare, b) interpolare

Sumarea, multiplicarea și scalarea secvențelor

Suma a două semnale $x_1[n]$ și $x_2[n]$ este un semnal $y[n]$ ale cărui valori la un anumit moment sunt egale cu suma valorilor semnalelor implicate în sumă la acel moment

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n], \quad n \in Z \tag{2.31}$$

Produsul a două secvențe se obține efectuând produsul eșantion cu eșantion al secvențelor

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n], \quad n \in Z \tag{2.32}$$

Scalarea amplitudinii unui semnal cu o constantă A se realizează prin multiplicarea valorii fiecărui eșantion al semnalului cu constanta A

$$y[n] = A \cdot x[n], \quad n \in Z \tag{2.33}$$

2.4. Sisteme discrete

Un *sistem discret* este un dispozitiv sau un algoritm care operează asupra unui semnal discret, numit *intrare* sau *excitație*, conform unor reguli bine definite, pentru a produce un alt semnal discret, numit *ieșirea* sau *răspunsul sistemului*.

Semnalul de intrare $x[n]$ este transformat de sistemul discret în semnalul de ieșire $y[n]$, conform relației

$$y[n] \equiv H[x[n]] \tag{2.34}$$

unde H reprezintă transformarea (numită uneori și operator) sau procesarea realizată de sistem asupra lui $x[n]$ pentru a produce $y[n]$. Grafic, relația (2.34) este reprezentată în figura 2.11.

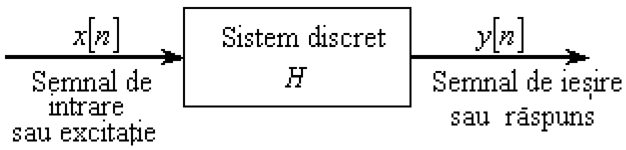

Figura 2.11. Reprezentarea unui sistem în timp discret

În continuare se va face referire numai la sisteme cu o singura intrare și o singura ieșire. Există mai multe moduri de a caracteriza un sistem discret și a descrie operația pe care el o execută asupra intrării pentru a obține răspunsul sistemului. Unul dintre acestea constă în descrierea sistemului printr-o relație intrare – ieșire, ignorându-se detaliile de structură internă sau de realizare a sistemului, acesta fiind văzut ca o "cutie neagră". Această situație este descrisă de notația

$$x[n] \xrightarrow{H} y[n] \qquad (2.34')$$

echivalentă cu (2.34).

Exemplul 2.4.

Relația intrare – ieșire este exemplificată prin următoarele sisteme, în care semnalul de intrare se consideră a fi

$$x[n] = \begin{cases} |n|, & -3 \le n \le 3 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

a) $y[n] = x[n]$

b) $y[n] = x[n-1]$

c) $y[n] = x[n+1]$

d) $y[n] = \frac{1}{3}[x[n+1] + x[n] + x[n-1]]$

e) $y[n] = \max\{x[n+1], x[n], x[n-1]\}$

f) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + ...$ (2.35)

Semnalul de intrare poate fi scris explicit sub forma secvenței

$$x[n] = \{...0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0...\}$$

Ieșirea sistemelor este

a) $y[n] = \{...0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0...\}$

Se observă că ieșirea este identică cu intrarea și sistemul se numește *identitate*.

b) $y[n] = \{...0, 3, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 2, 3, 0...\}$

În acest caz sistemul întârzie cu un eșantion semnalul de intrare.

c) $y[n] = \{...0, 3, 2, 1, 0, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 0...\}$

Acest sistem "avansează" sau anticipează semnalul de intrare cu un eșantion.

d) $y[n] = \{...0, 1, \frac{5}{3}, 2, 1, \underset{\uparrow}{\frac{2}{3}}, 1, 2, \frac{5}{3}, 1, 0...\}$

În acest caz, sistemul realizează media aritmetică a eșantionului prezent, trecut și următor pentru fiecare moment de timp.

e) $y[n] = \{..0, 3, 3, 3, 2, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 3, 3, 0...\}$

Acest sistem selectează la fiecare moment *n* valoarea maximă dintre $x[n-1]$, $x[n]$ și $x[n+1]$.

f) $y[n] = \{..0, 3, 5, 6, \underset{\uparrow}{6}, 7, 9, 12, 0...\}$

Acest sistem este un *acumulator*, calculând suma tuturor eșantioanelor trecute până la momentul respectiv.

Pentru unele din sistemele considerate în exemplele precedente se observă că ieșirea la un moment $n = n_0$ nu depinde numai de intrarea de la $n = n_0$ (adică $x[n_0]$), ci și de valorile intrării la momente dinainte și după n_0.

În exemplul acumulatorului relația intrare – ieșire care îl definește poate fi rescrisă echivalent sub forma

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=\sum_{k=-\infty}^{n-1}x[k]+x[n]=y[n-1]+x[n] \qquad (2.35')$$

care justifică numele de acumulator, sistemul calculând valoarea curentă a ieșirii prin adunarea (acumularea) valorii curente a intrării la valoarea precedentă a ieșirii.

Pentru acest exemplu se presupune că semnalul de intrare este cunoscut pentru $n \le n_0$ și se dorește să se determine ieșirea $y[n]$ pentru $n \ge n_0$.

Pentru $n = n_0$, $n_0 + 1$, ... , relația (2.35) devine

$$y[n_0]=y[n_0-1]+x[n_0],$$
$$y[n_0+1]=y[n_0]+x[n_0+1]$$

ș. a. m. d.

Se observă că în calculul lui $y[n_0]$ intervine $y[n_0-1]$, care se poate calcula cu relația

$$y[n_0-1]=\sum_{k=-\infty}^{n_0-1}x[k],$$

adică $y[n_0-1]$ reprezintă efectul tuturor intrărilor anterioare momentului n_0 asupra sistemului. Răspunsul sistemului pentru $n \ge n_0$ la semnalul de intrare $x[n]$ aplicat la momentul n_0 depinde de semnalul de intrare la momentul n_0 și toate intrările aplicate anterior. În consecință, $y[n]$ pentru $n \ge n_0$ nu este unic determinat de intrarea $x[n]$ pentru $n \ge n_0$.

Informația suplimentară necesară determinării lui $y[n]$ pentru $n \ge n_0$ este *condiția inițială* $y[n_0-1]$, care sintetizează efectul intrărilor anterioare asupra sistemului. Condiția inițială $y[n_0-1]$ împreună cu secvența de intrare $x[n]$ pentru $n \ge n_0$ vor determina în mod unic secvența de ieșire $y[n]$ pentru $n \ge n_0$.

Dacă acumulatorul nu a avut nici o excitație înainte de n_0, condiția inițială $y[n_0-1]=0$, caz în care sistemul se zice că este *inițial relaxat*. În acest caz, ieșirea $y[n]$ depinde numai de secvența de intrare $x[n]$ pentru $n \ge n_0$.

De obicei, sistemele se consideră relaxate la $n=-\infty$. Dacă intrarea se aplică unui sistem de la $n=-\infty$, ieșirea sistemului este unic determinată de secvența de intrare.

Se observă, în cazul acumulatorului, ca pentru a determina în mod unic secvența de ieșire $y[n]$ pentru $n \geq n_0$, este necesară o singură condiție inițială. În general, pentru sisteme discrete, informația suplimentara constituită de setul de valori $y[n_0-1]$, $y[n_0-2], \ldots$ $y[n_0-N]$ necesare determinării ieșirii $y[n]$ pentru $n \geq n_0$, la secvența de intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$, poartă numele de *condiții inițiale*. Dacă acestea sunt nule, sistemul este *inițial relaxat*. Aceste noțiuni vor fi reluate în paragraful 2.5, unde se va introduce descrierea sistemelor discrete cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe.

Exemplul 2.5.

Se consideră acumulatorul descris de (2.35) excitat de secvența $x[n]=n \cdot u[n]$. Să se determine secvența de ieșire în condițiile:

a) sistemul este inițial relaxat ($y[-1]=0$);

b) $y[-1]=1$.

Ieșirea sistemului este definită ca

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]=\sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]+\sum_{k=0}^{n} x[k]=y[-1]+\sum_{k=0}^{n} x[k]$$

Dar $\sum_{k=0}^{n} x[k]=\dfrac{n(n+1)}{2}$

a) Dacă $y[-1]=0 \rightarrow y[n]=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 0$;

b) Dacă $y[-1]=1 \rightarrow y[n]=1+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2+n+2}{2}$, $n \geq 0$.

2.4.1. Reprezentarea simbolică a sistemelor discrete

Operațiile asupra semnalelor discrete reprezentate prin secvențe sunt realizate de sisteme discrete a căror reprezentare simbolică este dată în continuare.

Sumator.

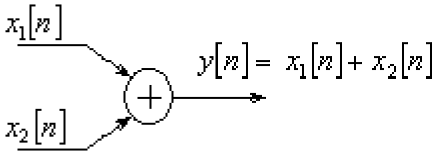

Figura 2.12. Reprezentarea simbolică a sumatorului

Multiplicator cu o constantă

Figura 2.13. Reprezentarea simbolică a multiplicatorului cu o constantă

Multiplicator de semnal

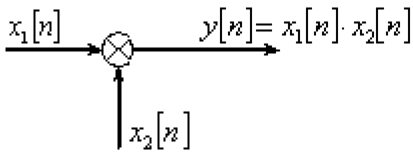

Figura 2.14. Reprezentarea simbolică a multiplicatorului

Element de întârziere

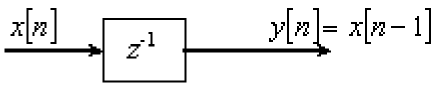

Figura 2.15. Reprezentarea simbolică a unui element de întârziere

Element de anticipare

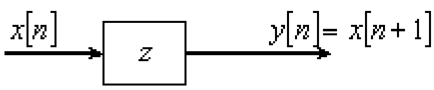

Figura 2.16. Reprezentarea grafică a unui element de anticipare

Observație. Operația de anticipare este nerealizabilă fizic într-un sistem de timp real.

Exemplul 2.6.

Cu ajutorul blocurilor constructive prezentate anterior să se reprezinte diagrama bloc a sistemului discret descris de

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+5x[n]+2x[n-2].$$

Soluție. Din relația intrare – ieșire care caracterizează sistemul se observă că acesta poate fi implementat cu ajutorul a 3 multiplicatoare, 2 sumatoare și 3 elemente de întârziere.

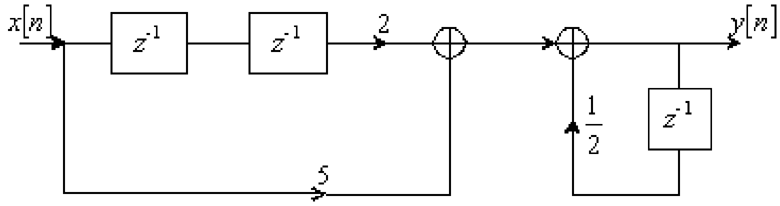

Figura 2.17. Reprezentarea diagramei bloc pentru sistemul din exemplul 2.6.

2.4.2. Clasificarea sistemelor discrete

În analiza și proiectarea sistemelor discrete este de dorit clasificarea lor în funcție de proprietățile generale pe care acestea le au. Din acest motiv este necesară specificarea unor proprietăți ale acestora care pot fi folosite în descrierea caracteristicilor lor generale.

2.4.2.1. Sisteme discrete statice și dinamice

Un sistem discret se numește *static* sau *fără memorie* dacă ieșirea sa la un moment oarecare *n* depinde numai de intrarea din acel moment.

În caz contrar, sistemul se numește *dinamic* sau *cu memorie*. Dacă ieșirea unui sistem la un moment *n* este complet determinată de intrările $x[n-N],...,x[n]$ ($N \geq 0$), se spune că acesta are memorie de ordinul *N*. Dacă N este finit, sistemul este *cu memorie finită*, iar dacă $N=\infty$, sistemul are *memorie infinită*.

Exemple de sisteme statice (fără memorie)

a) $y[n]=a\,x[n]$;

b) $y[n]=n\,x[n]+b\,x^3[n]$.

Exemple de sisteme dinamice (cu memorie)

c) $y[n]=x[n]+3x[n-1]$;

d) $y[n]=\sum_{k=0}^{N} x[n-k]$;

e) $y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]$.

Sistemele c) și d) au memorie finită, în timp ce e) are memorie infinită.

Se observă că sistemele statice sunt descrise în general de o relație intrare – ieșire de forma

$$y[n]=F[x[n],n] \tag{2.36}$$

și nu includ elemente de întârziere (memorie).

2.4.2.2. Sisteme discrete invariante și variante în timp

Sistemele pot fi împărțite în două mari categorii:

- sisteme invariante în timp;
- sisteme variante în timp.

Prin definiție, un sistem relaxat, descris de operatorul H este *invariant în timp* dacă și numai dacă

$$x[n] \xrightarrow{\mathrm{H}} y[n]$$

implică

$$x[n-k] \xrightarrow{H} y[n-k] \tag{2.37}$$

pentru orice semnal de intrare $x[n]$ și orice deplasare k.

Pentru a determina dacă un sistem este sau nu invariant în timp se procedează în felul următor:
Se consideră o intrare arbitrară $x[n]$, care va produce răspunsul $y[n]$. Se întârzie semnalul de intrare cu k unități și se recalculează ieșirea. În general, aceasta se poate scrie

$$y[n,k]=H[x[n-k]] \tag{2.38}$$

Dacă ieșirea $y[n,k]$ este egală cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k, sistemul este invariant în timp. În caz contrar, dacă $y[n,k]\neq y[n-k]$, chiar pentru o singură valoare a lui k, sistemul este variant în timp.

Exemplul 2.7.

Să se determine dacă sistemele descrise de următoarele relații intrare – ieșire sunt sau nu variante în timp.

a) $y[n]=H[x[n]]=x[n]-x[n-1]$;

b) $y[n]=H[x[n]]=n\cdot x[n]$;

c) $y[n]=x[n]\cos\omega_0 n$.

a) $y[n,k]=H[x[n-k]]=x[n-k]-x[n-k-1]$

$y[n-k]=x[n-k]-x[n-k-1]$

Deoarece $y[n,k]=y[n-k]$, rezultă că sistemul este invariant în timp.

b) $y[n,k]=H[x[n-k]]=n\cdot x[n-k]$

$y[n-k]=(n-k)\cdot x[n-k]$

Se observă că $y[n,k]\neq y[n-k]$, rezultă că sistemul este variant în timp.

c) $y[n,k]=H[x[n-k]]=x[n-k]\cos\omega_0 n$

$y[n-k]=x[n-k]\cos\omega_0(n-k)$

Deoarece $y[n,k]\neq y[n-k]$, rezultă că sistemul este variant în timp.

2.4.2.3. Sisteme discrete liniare și neliniare

Prin definiție, un sistem discret este liniar, dacă satisface principiul superpoziției. Cu alte cuvinte, în acest caz, răspunsul sistemului la o sumă ponderată de semnale de intrare este egal cu suma răspunsurilor sistemului la fiecare din semnalele de intrare, ponderate corespunzător, adică un sistem discret, relaxat, caracterizat de operatorul H este *liniar*, dacă

$$H[a_1x_1[n]+a_2x_2[n]]=a_1H[x_1[n]]+a_2H[x_2[n]] \tag{2.39}$$

pentru orice secvențe de intrare arbitrare $x_1[n]$ și $x_2[n]$ și pentru orice constante arbitrare a_1 și a_2.

Relația (2.39) implică proprietățile de scalare și aditivitate ale sistemelor liniare și poate fi extinsă la orice combinație ponderată de semnale de intrare, pe baza inducției. Într-adevăr, dacă se presupune că

$$x[n]=\sum_{k=1}^{M-1}a_kx_k[n]\xrightarrow{\ H\ }y[n]=\sum_{k=1}^{M-1}a_ky_k[n]$$

unde $y_k[n]=H[x_k[n]]$, k = 1, 2, ... $M-1$, este adevărată pentru $M-1$ semnale, atunci pentru semnalul

$$\sum_{k=1}^{M}a_kx_k[n]=x[n]+a_Mx_M[n],$$

ieșirea sistemului este

$$H\left[\sum_{k=1}^{M}a_kx_k[n]\right]=H[x[n]+a_Mx_M[n]]=H[x[n]]+a_MH[x_M[n]]$$

$$=\sum_{k=1}^{M-1}a_ky_k[n]+a_My_M[n]=\sum_{k=1}^{M}a_ky_k[n]$$

În general, din (2.39) se observă că un sistem relaxat, liniar, cu intrarea zero produce ieșirea nulă. Dacă un sistem produce o ieșire diferită de zero la intrare zero, el este fie nerelaxat, fie neliniar.

Dacă un sistem discret nu satisface principiul superpoziției, el se numește *neliniar*.

Exemplul 2.8.

Să se determine dacă sistemele descrise de următoarele relații intrare – ieșire sunt sau nu liniare.

a) $y[n] = H[x[n]] = n \cdot x[n]$;

b) $y[n] = H[x[n]] = x[n^2]$;

c) $y[n] = H[x[n]] = x^2[n]$.

Soluție.

a) Pentru două secvențe de intrare $x_1[n]$ și $x_2[n]$, ieșirile corespunzătoare sunt

$$y_1[n] = n \cdot x_1[n]$$
$$y_2[n] = n \cdot x_2[n]$$

O combinație liniară a celor două semnale de intrare are ca rezultat ieșirea

$$y_3[n] = H[a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]] = n[a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]]$$
$$= a_1 n x_1[n] + a_2 n x_2[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$$

care este o combinație liniară a ieșirilor corespunzătoare, deci sistemul este liniar.

b) $$y_1[n] = x_1[n^2], \qquad y_2[n] = x_2[n^2]$$

$$y_3[n] = H[a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]] = a_1 x_1[n^2] + a_2 x_2[n^2] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$$

deci sistemul este liniar.

c) $$y_1[n] = x_1^2[n], \qquad y_2[n] = x_2^2[n]$$

$$y_3[n] = H[a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]] = a_1^2 x_1^2[n] + 2a_1 a_2 x_1[n] x_2[n] + a_2^2 x_2^2[n] =$$
$$= a_1^2 y_1[n] + a_2^2 y_2[n] + 2a_1 a_2 x_1[n] x_2[n]$$

Combinația liniară corespunzătoare a ieșirilor $y_1[n]$ și $y_2[n]$ este

$$a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] = a_1 x_1^2[n] + a_2 x_2^2[n] \neq y_3[n],$$

deci sistemul este neliniar.

2.4.2.4. Sisteme discrete cauzale și necauzale

Un sistem discret este *cauzal* dacă ieșirea sa la un moment *n*, $y[n]$, depinde numai de valoarea prezentă și cele trecute ale intrării ($x[n], x[n-1], ...$) și de nici o valoare viitoare ($x[n+1], x[n+2], ...$). Matematic, ieșirea unui sistem cauzal poate fi scrisă sub forma

$$y[n] = F[x[n], x[n-1], x[n-2], ...] \tag{2.40}$$

unde $F[\cdot]$ este o funcție arbitrară. Un sistem discret care nu satisface relația (2.40) se numește *necauzal*. Un sistem necauzal nu este realizabil fizic.

Exemplul 2.9.

Să se stabilească dacă sistemele descrise de următoarele relații intrare – ieșire sunt sau nu cauzale.

a) $y[n] = x[n] - x[n-1]$;

b) $y[n] = x[n+1] - x[n]$;

c) $y[n] = x[n^2]$;

d) $y[n] = x[-n]$.

Soluție

a) cauzal;

b) necauzal;

c) necauzal;

d) necauzal (de exemplu, pentru $n = -1$, $y[-1] = x[1]$).

Prin analogie cu sistemele cauzale, se definesc secvențele cauzale cele care sunt egale cu zero pentru n<0. În caz contrar, ele se numesc necauzale. Dacă o secvență este diferită de zero numai pentru n<0, aceasta se numește pur necauzală.

2.4.2.5. Sisteme discrete stabile și instabile

Stabilitatea este o proprietate importantă care trebuie avută în vedere în orice aplicație practică. Un sistem oarecare, relaxat, se spune că este stabil în sens MIME (**M**ărginit la **I**ntrare **M**ărginit la i**E**șire), dacă și numai dacă orice semnal de intrare limitat produce un semnal de ieșire limitat (se mai folosește acronimul englezesc BIBO de la **B**ounded **I**nput – **B**ounded **O**utput, în specificarea sistemelor stabile). Matematic, aceasta se poate scrie

dacă $|x[n]| \le M_x < \infty$; atunci $|y[n]| \le M_y < \infty$ (2.41)

Implicațiile pe care le are stabilitatea pentru sistemele liniare invariante în timp vor fi discutate în paragraful 2.4.7.
Se spune că un sistem cauzal și stabil este realizabil. În caz contrar este nerealizabil.

Alte clasificări ale sistemelor discrete în funcție de răspunsul la impuls și de modul de implementare vor fi prezentate în paragrafele 2.4.8 și 2.4.9, după introducerea descrierii sistemelor discrete cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe și a sumei de convoluție.

2.4.3. Analiza sistemelor discrete, liniare, invariante în timp (SDLIT) Suma de convoluție

În continuare se vor trata sisteme discrete, liniare, invariante în timp, pentru care se va arăta că sunt complet caracterizate în domeniul timp de răspunsul la impuls.

Există două metode de bază, folosite în analiza răspunsului sistemelor discrete liniare la un semnal de intrare dat. Una se bazează pe obținerea soluției din ecuația intrare – ieșire care caracterizează sistemul, care are, în general, forma

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] \tag{2.42}$$

unde a_k și b_k sunt parametri constanți care caracterizează sistemul și independenți de $x[n]$ și $y[n]$. Relația (2.42) se numește *ecuație cu diferențe* a sistemului discret, liniar, invariant în timp.

A doua metodă se bazează pe folosirea răspunsului la impuls al sistemului. Ca o consecință a proprietăților de liniaritate și invarianță în timp, răspunsul sistemului la un semnal de intrare arbitrar poate fi exprimat în funcție de răspunsul său la impuls cu ajutorul sumei de convoluție. Pentru determinarea răspunsului unui sistem liniar la un semnal de intrare dat, acesta se descompune într-o sumă de semnale elementare componente și, folosind proprietatea de liniaritate a sistemului, răspunsurile sistemului la semnalele elementare se sumează pentru a forma răspunsul total.

Orice semnal $x[n]$ poate fi descompus într-o sumă de impulsuri scalate și întârziate, conform relației (2.6). De exemplu, secvența $x[n] = \{2, \underset{\uparrow}{4}, 0, 3\}$ poate fi scrisă sub forma

$$x[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 3\delta[n-2]$$

Se definește răspunsul sistemului $y[n,k]$ la un impuls aplicat la momentul $n-k$ cu relația

$$y[n,k] \equiv h[n,k] = H[\delta[n-k]] \tag{2.43}$$

În (2.43), n desemnează timpul, iar k arată localizarea în timp a impulsului de intrare.

Considerând semnalul de intrare dat de (2.6), răspunsul sistemului va fi

$$y[n] = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \tag{2.44}$$

Sistemul discret fiind liniar, conform principiului superpoziției, rezultă

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]H\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n,k] \tag{2.45}$$

Dacă sistemul discret liniar este și invariant în timp, adică dacă

$$\begin{gathered} \delta[n] \xrightarrow{H} h[n] \text{ atunci} \\ \delta[n-k] \xrightarrow{H} h[n-k], \end{gathered} \tag{2.46}$$

relația (2.45) devine

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{2.47}$$

Relația (2.47) este cunoscută sub denumirea de *sumă de convoluție* și din aceasta rezultă că, dacă pentru un sistem discret liniar invariant în timp se cunoaște răspunsul la impuls, se poate deduce răspunsul sistemului la orice secvență de intrare. Funcția $h[n]$ se mai numește *funcție pondere*.

Pentru calculul ieșirii la un anumit moment $n = n_0$ se efectuează următoarele operații elementare:

1. *Reflectarea*. Răspunsul la impuls $h[k]$ este "reflectat" față de $k = 0$ pentru a obține $h[-k]$.
2. *Deplasarea în timp*. Se deplasează $h[-k]$ cu n_0 unități de timp spre dreapta (stânga) dacă n_0 este pozitiv (negativ) pentru a obține $h[n_0 - k]$.
3. *Multiplicarea*. Se înmulțește $x[k]$ cu $h[n_0 - k]$ pentru a produce secvențe de tipul $v_{n_0}[k] \equiv x[k]\,h[n_0 - k]$.
4. *Sumarea*. Se sumează toate valorile secvenței produs $v_{n_0}[k]$ pentru a se obține ieșirea la momentul $n = n_0$.

Pașii 2÷4 trebuie repetați pentru toate valorile posibile ale lui n_0 pentru a obține $y[n]$ pentru $-\infty < n < \infty$. Operația de convoluție este simetrică, adică nu contează care din cele două secvențe este reflectată și deplasată. Într-adevăr, dacă în (2.47) se efectuează schimarea de variabilă m=n-k, atunci k=n-m,

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] \tag{2.48}$$

Revenind la indexul k, se obține

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \tag{2.48'}$$

relație care arată, de fapt, că suma de convoluție este comutativă.

Exemplul 2.10.

Să se determine răspunsul sistemului care are răspunsul la impuls

$$h[n]=\begin{cases} 1, & n=-1 \\ 2, & n=0 \\ 1, & n=1 \\ -1, & n=2 \\ 0, & \text{`n rest.} \end{cases} \quad \text{la intrarea } x[n]=\begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ 0, & \text{in rest.} \end{cases}$$

Soluție. Conform pașilor descriși anterior, se calculează întâi $h[-k]$.

$$h[-k]=\{\ldots,0,-1,1,2,1,0,\ldots\}$$
$$\uparrow$$

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k]=x[0]h[0]+x[1]h[-1]=4$$

$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k]=x[0]h[1]+x[1]h[0]+x[2]h[-1]=8$$

$$y[2]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k]=x[0]h[2]+x[1]h[1]+x[2]h[0]=7$$

$$y[3]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k]=x[1]h[2]+x[2]h[1]=1$$

$$y[4]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[4-k]=x[2]h[2]=-3$$

$$y[-1]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[-1-k]=x[0]h[-1]=1;$$

$$y[n]=\{...,0,\ 1,\ 4,\ 8,\ 7,\ 1,\ -3,\ 0,...\}$$

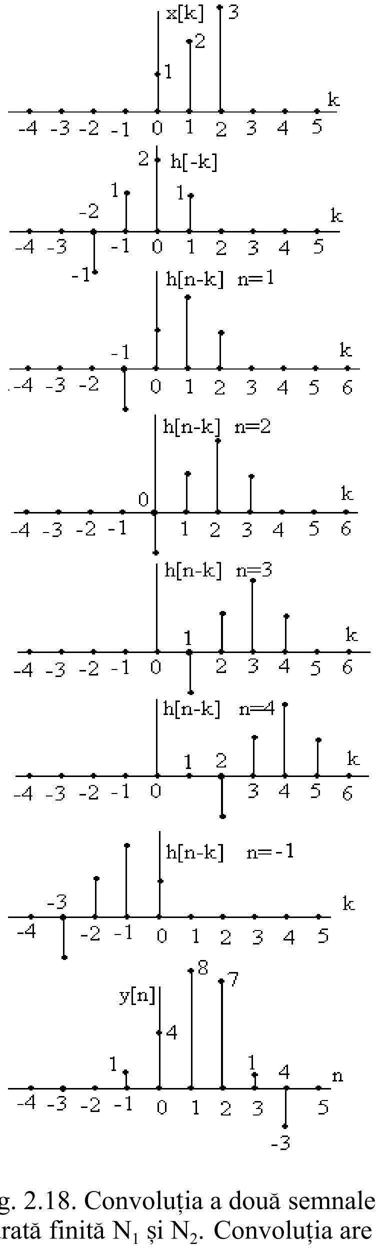

Fig. 2.18. Convoluția a două semnale de durată finită N_1 și N_2. Convoluția are durata N_1+N_2-1

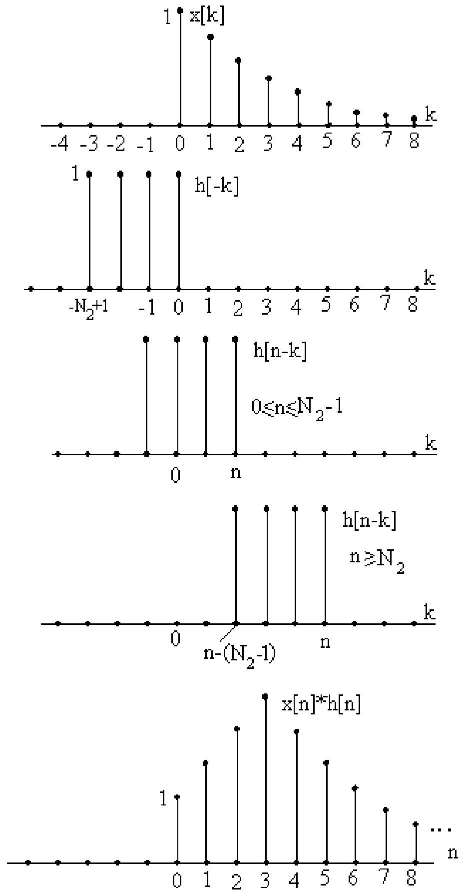

Fig. 2.19. Convoluția unui semnal discret de durată infinită cu un semnal discret de durată finită.

Grafic, rezultatele anterioare pot fi urmărite pe figura 2.18. $h[-k]$ se deplasează cu n unități. Pentru n>0, deplasarea este spre dreapta și pentru n<0, spre stânga. Conform pașilor prezentați anterior, pentru o valoare n dată, se efectuază produsele dintre $x[k]$ și $h[n-k]$, eșantion cu eșantion, și apoi se sumează.
Dacă semnalele au durată finită, având N_1, respectiv N_2 eșantioane, cuprinse între $-N_3$ și $-N_3+N_1-1$, respectiv $-N_4$ și $-N_4+N_2-1$, convoluția lor are durată finită, având N_1+N_2-1 eșantioane, produsul $x[k]h[n-k]$ fiind zero pentru toți k atunci când $n < -(N_4+N_3)$ și $n>-N_4+N_2-1-N_3+N_1-1$. În cazul exemplului considerat, $N_1=3$, $N_2=4$, $N_3=0$, $N_4=1$ și produsele $x[k]h[n-k]$ sunt zero pentru n<-1 și n>4. Prin urmare, nu se pune problema convergenței sumei de convoluție, dacă ambele semnale au durată finită și, evident, fiecare din semnale este mărginit $|x[n]| \le M_1, \forall n \in Z$, $|h[n]| \le M_2, \forall n \in Z$.

Exemplul 2.11.

Să se determine convoluția dintre semnalul $x[n]$ de durată nemărginită $x[n]=a^n u[n]$, și $h[n]=u[n]-u[n-N_2]$, care este nenul doar pentru 0, 1, 2, N_2-1, adică are lungimea N_2.

Soluție. Convoluția acestor semnale este ilustrată în figura 2.19. Unul din semnale fiind de durată nemărginită, și convoluția va avea durată infinită și, prin urmare, se va pune problema convergenței sumei ce reprezintă convoluția pentru toate valorile lui n.

Din figură se observă că pentru n<0, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]=0$.

Dacă $0 \le n < N_2$, $(x*h)[n]=\sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Dacă $n \ge N_2$, $(x*h)[n]=\sum_{k=n-N_2+1}^{n} a^k = a^{n-N_2+1}\dfrac{1-a^{N_2}}{1-a}$.

2.4.4. Proprietățile sistemelor discrete, liniare, invariante în timp și interconectarea acestora

Deoarece răspunsul unui SDLIT este dat de o sumă de convoluție, proprietățile acestei clase de sisteme sunt definite de proprietățile sumei de convoluție discrete, care este comutativă şi asociativă.

1. Comutativitatea sistemelor și conectarea lor în cascadă. Proprietățile de comutativitate și asociativitate ale sumei de convoluție conduc la comutativitatea SDLIT. Pentru a ilustra acest lucru, se consideră sistemele din figura 2.20a și b.

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n] * h_2[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = \\ x[n] &* (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] = x_2[n] * h_1[n] = y_2[n]. \end{aligned} \qquad (2.50)$$

Sistemele din figura 20 a și b sunt echivalente cu sistemul din figura 20 c. Se constată că într-o cascadă de sisteme discrete, liniare, invariante în timp nu contează locul acestora în cascadă, deoarece, indiferent de poziția acestora, pentru același semnal de intrare se obține același semnal de ieșire. Ca o consecință a proprietății de comutativitate și asociativitate, răspunsul la impuls al unei cascade de SDLIT este independent de ordinea sistemelor în cascadă.

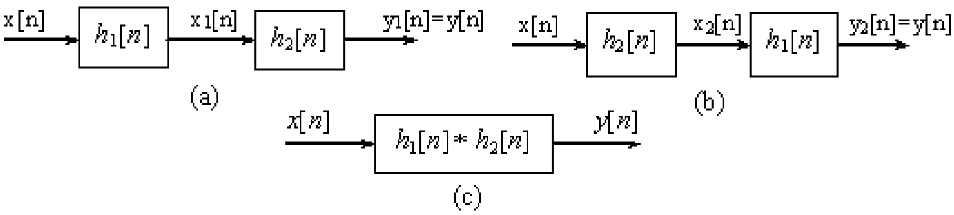

Figura 2.20. Ilustrarea proprietății de comutativitate a SDLIT

2. **Impulsul unitate $\delta[n]$ este element neutru pentru suma de convoluție**

$$\begin{aligned} x[n] * \delta[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] = \\ &= \ldots x[n-1]\,\delta[1] + x[n]\,\delta[0] + x[n+1]\,\delta[-1] + \ldots = x[n] \end{aligned} \qquad (2.51)$$

deci, dacă la intrarea unui sistem discret liniar se aplică $x[n] = \delta[n]$ la ieșire se obține

$$y[n] = \delta[n] * h[n] = h[n] \qquad (2.52)$$

3. **Dacă la intrarea unui SDLIT se aplică $\delta[n-n_0]$, la ieșire se obține** $h[n-n_0]$, adică

$$\delta[n-n_0] * h[n] = h[n-n_0] \qquad (2.53)$$

4. **Un sistem având răspunsul la impuls $h[n] = \delta[n]$ nu modifică semnalul de intrare**

$$y[n] = x[n] \qquad (2.54)$$

În contextul conectării în cascadă a sistemelor se introduce noțiunea de *sistem invers*, caracterizat prin răspunsul la impuls $h_i[n]$ care satisface relația

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n] \tag{2.55}$$

5. Conectarea în paralel a SDLIT. În figura 2.21 (a) este prezentată conectarea în paralel a două sisteme $h_1[n]$ și $h_2[n]$. Se poate arăta simplu că acesta este echivalent cu sistemul din figura 2.21 (b).

Într-adevăr, conform figurii 2.21.a, se poate scrie

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) \tag{2.56}$$

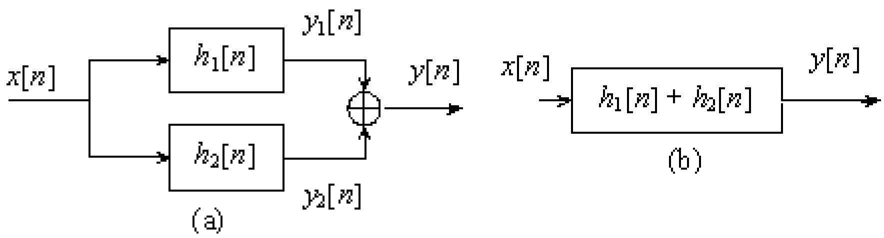

Figura 2.21. Conectarea în paralel a două SDLIT

2.4.5. Răspunsul SDLIT la treapta unitate

Deși răspunsul la impuls joacă un rol esențial în analiza și sinteza sistemelor discrete, liniare, invariante în timp, uneori prezintă interes utilizarea răspunsului la treapta unitate pentru a obține răspunsul sistemului la o intrare arbitrară. Răspunsul la treapta unitate $x[n] = u[n]$ se obține utilizând suma de convoluție

$$y[n] = s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \tag{2.57}$$

Din această relație se poate obține explicit răspunsul la impuls în funcție de răspunsul la treapta unitate, după cum urmează:

$$s[n] = h[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} h[k] = h[n] + s[n-1] \tag{2.58}$$

de unde rezultă

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \tag{2.59}$$

Pentru a obține răspunsul $y[n]$ al sistemului la semnalul de intrare $x[n]$, se înlocuiește $h[n]$ dat de (2.59) în relația (2.47).

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\big[s[n-k]-s[n-k-1]\big]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]s[n-k]-\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]s[n-k-1] \tag{2.60}$$

Cunoscând răspunsul $s[n]$ al unui sistem la treapta unitate, se definește convoluția dintre acesta și un semnal oarecare de intrare ca fiind

$$y_s[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]s[n-k] \tag{2.61}$$

Răspunsul $y[n]$ al sistemului la intrarea $x[n]$ se poate exprima sub forma

$$y[n]=y_s[n]-y_s[n-1] \tag{2.62}$$

2.4.6. Cauzalitatea sistemelor discrete, liniare, invariante în timp exprimată în funcție de răspunsul la impuls

În cazul SDLIT cauzalitatea poate fi exprimată în funcție de răspunsul la impuls al sistemului. Pentru a determina această relație, fie un SDLIT a cărui ieșire la un moment $n=n_0$ este dată de suma de convoluție

$$y[n_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n_0-k] \tag{2.63}$$

care se împarte în doi termeni, unul conținând valoarea prezentă și cele trecute ale intrării ($x[n]$ pentru $n\le n_0$) și unul care conține valorile viitoare ale intrării ($x[n]$ pentru $n>n_0$).

$$\begin{gathered}y[n_0]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n_0-k]+\sum_{k=-\infty}^{-1}h[k]x[n_0-k]=\\ \big[h[0]x[n_0]+h[1]x[n_0-1]+...\big]+\big[h[-1]x[n_0+1]+h[-2]x[n_0+2]+...\big]\end{gathered} \tag{2.64}$$

Cum pentru un sistem cauzal ieșirea la momentul n_0 depinde numai de valoarea prezentă și cele trecute ale intrării, rezultă că răspunsul la impuls al sistemului trebuie să satisfacă condiția

$$h[n]=0 \quad pentru \quad n<0 \tag{2.65}$$

Deoarece $h[n]$ este răspunsul la impuls al SDLIT relaxat, rezultă că relația (2.65) este condiția necesară și suficientă pentru cauzalitate. Datorită acestei condiții limitele sumei pot fi modificate pentru a reflecta această restricție, obținându-se

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]h[n-k] \tag{2.66}$$

Anterior s-a intodus noțiunea de *secvență cauzală* pentru a denumi o secvență care este zero pentru n<0 și de secvență *necauzală* pentru a denumi o secvență care este diferită de zero pentru n<0. Această terminologie semnifică faptul că astfel de secvențe pot fi răspunsurile la impuls ale unui sistem cauzal, respectiv, necauzal.

Dacă la intrarea unui SDLIT cauzal se aplică o secvență cauzală, suma de convoluție devine

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{n}x[k]h[n-k] \tag{2.67}$$

Răspunsul unui SDLIT cauzal la un semnal de intrare cauzal este, de asemenea, cauzal, deoarece $y[n]=0$, pentru $n<0$.

2.4.7. Stabilitatea sistemelor discrete, liniare, invariante în timp exprimată în funcție de răspunsul la impuls

Condiția de stabilitate în sens MIME din paragraful 2.4.2.5 poate fi exprimată pentru SDLIT în funcție de caracteristicile sistemului. Fie un SDLIT caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$ căruia i se aplică un semnal de intrare mărginit $|x[n]|\leq M_x<\infty$. Ieșirea sa este dată de suma de convoluție (2.48').

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]\right|\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k[k]||x[n-k]|\leq M_x\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]| \tag{2.68}$$

Din relația (2.68) se observă că semnalul de ieșire va fi mărginit dacă răspunsul la impuls al sistemului satisface condiția

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|\leq\infty \tag{2.69}$$

În concluzie, un SDLIT este stabil în sens MIME dacă răspunsul său la impuls este absolut sumabil.

2.4.8. Sisteme discrete cu răspuns finit la impuls și răspuns infinit la impuls

Așa cum s-a arătat anterior, SDLIT pot fi caracterizate în funcție de durata răspunsului lor la impuls. Aceste sisteme se împart în două clase, și anume: cele al căror răspuns la impuls are durată finită, numite sisteme FIR (acronimul provenind de la inițialele englezești "finite impulse response") și cele al căror răspuns la impuls are durată infinită, numite sisteme IIR ("infinite impulse response").

Un sistem FIR are un răspuns la impuls egal cu zero în afara unui interval finit. Fără a pierde din generalitate, pentru sistemele FIR cauzale se poate scrie

$$h[n] = 0\,, \quad \text{pentru } n < 0 \text{ şi } n \geq M \tag{2.70}$$

caz în care suma de convoluție devine

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]\, x[n-k] \tag{2.71}$$

O interpretare utilă a acestei expresii se obține observând că ieșirea la momentul n este o sumă ponderată a eșantioanelor semnalului de intrare $x[n], x[n-1], \ldots x[n-M+1]$. Cu alte cuvinte, sistemul ponderează cu valorile răspunsului la impuls $h[k]$ cele mai recente M valori ale eșantioanelor de semnal și sumează cele M produse. În consecință, sistemul acționează ca o fereastră care "vede" numai ultimele M eșantioane ale intrării pentru a obține ieșirea. Cu alte cuvinte, un sistem FIR are o memorie finită de ordin M.

Spre deosebire de sistemele FIR, un sistem IIR are răspunsul la impuls de durată infinită și, cu ajutorul sumei de convoluție, răspunsul său este

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, x[n-k] \tag{2.72}$$

unde s-a presupus sistemul cauzal (limita inferioară a sumei este $k = 0$), deși această presupunere nu era absolut necesară.

Se observă că în calculul răspunsului sunt implicate valoarea prezentă și toate valorile precedente ale intrării, deci sistemul are memorie infinită.

2.4.9. Sisteme discrete recursive și nerecursive

Anterior s-a arătat cum se poate obține ieșirea unui SDLIT cu ajutorul sumei de convoluție în funcție de eșantioanele semnalului de intrare. Există multe sisteme pentru care este mai convenabil a se exprima ieșirea nu numai în funcție de valoarea prezentă și cele anterioare ale intrării, ci și în funcție de valorile precedente ale ieșirii.

Exemplul 2.12.

Fie sistemul definit de relația

$$y[n] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x[k] \qquad (2.73)$$

care calculează media eșantioanelor acumulate (media cumulativă).

Din (2.73) se observă că pentru calculul ieșirii $y[n]$ este necesară stocarea tuturor eșantioanelor $x[k]$, pentru $0 \le k \le n$. Aparent, este necesară o memorie care crește liniar cu numărul eșantioanelor de la intrare. Pentru sistemul descris de relația (2.73) este mai ușor să se calculeze $y[n]$ în funcție de $y[n-1]$ și $x[n]$. Într-adevăr, printr-o rearanjare simplă a relației (2.73) se obține

$$(n+1)\,y[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n] = n \cdot y[n-1] + x[n] \qquad (2.74)$$

și atunci

$$y[n] = \frac{n}{n+1}\,y[n-1] + \frac{1}{n+1}\,x[n] \qquad (2.75)$$

Acum media cumulativă se calculează mai ușor, multiplicând valoarea precedentă a ieșirii $y[n-1]$ cu $\frac{n}{n+1}$, valoarea eșantionului curent de intrare cu $\frac{1}{n+1}$ și apoi adunând cele două produse.

Conform relației (2.75), calculul lui $y[n]$ necesită două multiplicări, o adunare și o locație de memorie (element de întârziere), după cum este arătat în figura 2.22.

Acesta este un exemplu de sistem recursiv. În general, ieșirea unui sistem cauzal recursiv poate fi exprimată astfel

$$y[n] = F[\,y[n-1], y[n-2], ..., y[n-N], x[n], x[n-1], ..., x[n-M]\,] \qquad (2.76)$$

unde $F[\cdot]$ este o funcție de argumentele sale. Ecuația (2.76) este o *ecuație recursivă,* specificând un mod de calcul al ieșirii sistemului în funcție de valorile precedente ale ieșirii și valoarea prezentă și precedente ale intrării.

Spre deosebire de sistemul descris de (2.76), dacă $y[n]$ depinde numai de valoarea prezentă și cele trecute ale intrării, atunci

$$y[n] = F[\,x[n], x[n-1], ..., x[n-M]\,] \qquad (2.77)$$

și sistemul se numește *nerecursiv*.

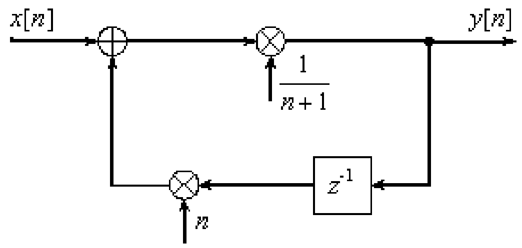

Figura 2.22. Implementarea sistemului descris de (2.75)

Un sistem FIR, cauzal, descris de suma de convoluție

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}h[k]\,x[n-k]=h[0]\,x[n]+h[1]\,x[n-1]+...+h[M]\,x[n-M]=$$
$$=F\big[\,x[n],x[n-1],...,x[n-M]\,\big], \qquad (2.78)$$

unde $F[\,\cdot\,]$ este o sumă ponderată a valorilor prezentă și trecute ale intrării cu valoarea răspunsului la impuls $h[n],\ 0\le n\le M$, este *nerecursiv*.

Diferența de bază între sistemele nerecursive și cele recursive constă în prezența la cele din urmă a unei reacții ce conține cel putin un element de întârziere.

Pentru calculul ieșirii $y[n_0]$ a unui sistem recursiv care este excitat cu un semnal aplicat la $n=0$, trebuie calculate toate valorile precedente ale ieșirii $y[0], y[1], ..., y[n_0-1]$. Spre deosebire de această situație, realizarea nerecursivă permite calculul lui $y[n_0]$ fără cunoașterea ieșirilor precedente. Din (2.76) se observă că ieșirea unui sistem recursiv se poate determina dacă se cunosc condițiile inițiale și intrarea. Din punct de vedere al contribuțiilor acestora în răspunsul sistemului se pot face următoarele observații:

1. Dacă sistemul este inițial relaxat la momentul $n=0$, memoria sa ar trebui să fie zero, deci $y[-1]=...=y[-N]=0$. Deoarece memoria sistemului determină starea sa, răspunsul acestuia în condiții inițiale nule se numește *răspuns de stare zero* sau *răspuns forțat* și se notează cu $y_{zs}[n]$ sau $y_{fr}[n]$.

2. Dacă sistemul este nerelaxat și intrarea sa este nulă, răspunsul său se numește *răspuns de intrare zero*, notat $y_{zi}[n]$. Acesta se mai numește *răspuns liber* sau *natural* $y_{nr}[n]$.

3. Un sistem recursiv cu condiții inițiale nenule este nerelaxat și poate produce un semnal de ieșire fără a avea excitație.

4. Pentru clasa sistemelor liniare răspunsul acestora este suma celor două răspunsuri, de intrare zero și de stare zero $y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$.

Întotdeauna este posibil a implementa un sistem FIR în manieră nerecursivă, dar prin rearanjarea adecvată a relației (2.77) care descrie sistemul, acesta poate fi implementat și recursiv.

Exemplul 2.13.

Fie un sistem FIR descris de ecuația

$$y[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x[n-k] \tag{2.79}$$

care calculează media mobilă sau alunecătoare.

Conform relației (2.77), acest sistem este de tip FIR, cu răspunsul la impuls

$$h[n] = \frac{1}{M+1}\ , \quad 0 \le n \le M \tag{2.80}$$

și implementarea din figura 2.23.

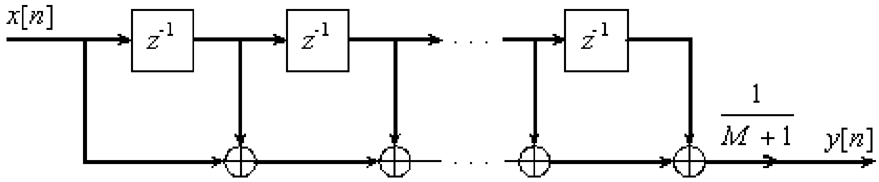

Figura 2.23. Implementarea nerecursivă a unui sistem FIR pentru calculul mediei mobile

Relația (2.79) poate fi însă rearanjată sub forma

$$y[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x[n-1-k] + \frac{1}{M+1}\left(x[n] - x[n-1-M]\right) = \tag{2.81}$$

$$= y[n-1] + \frac{1}{M+1}\left(x[n] - x[n-1-M]\right)$$

Relația (2.79), scrisă în forma echivalentă (2.81), poate fi implementată ca în figura 2.24 în formă recursivă.

Un sistem IIR nu poate fi implementat decât recursiv, deoarece implementarea nerecursivă ar implica un număr infinit de celule de întârziere.

În concluzie, termenii de FIR și IIR trebuie văzuți drept caracteristici generale ale sistemelor referitoare la durata răspunsului la impuls, în timp ce termenii de recursiv și nerecursiv se referă la posibilitățile de implementare ale acestora.

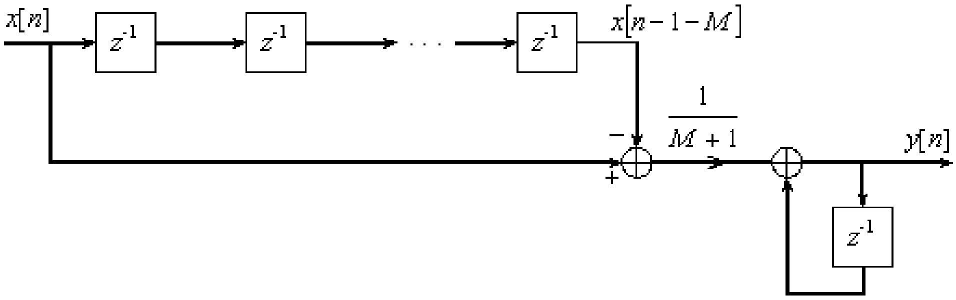

Figura 2.24. Implementarea recursivă a unui sistem FIR care calculează media mobilă

2.5. Corelația semnalelor discrete

În secțiunile precedente semnalele s-au presupus deterministe, adică fiecare valoare a secvenței este unic determinată de o expresie matematică, un tabel de atribuire sau o regulă oarecare. În multe situații însă, procesele care generează semnale sunt mult prea complexe, astfel încât descrierea lor este fie foarte dificilă, fie imposibilă. În aceste cazuri este utilă modelarea lor cu secvențe aleatoare, a căror caracterizare matematică se realizează pe baza mediilor de diferite ordine [15]. Semnalele aleatoare nu sunt absolut sumabile sau de pătrat sumabil și, în consecință, nu au transformată Fourier, dar multe din proprietățile acestor semnale pot fi descrise de funcțiile lor de autocorelație sau de corelație, pentru care transformata Fourier există adesea.

Ca și în cazul convoluției, în cazul operației de corelație sunt implicate două semnale. Spre deosebire de convoluție, scopul calculării corelației a două semnale este de a obține o măsură a gradului în care cele două semnale sunt dependente și de a extrage informații din această dependență.

Operația de corelație este folosită în cazul radarului, sonarului, comunicațiilor digitale și alte aplicații. Spre exemplu, se presupune că există două secvențe aleatoare $x[n]$ și $y[n]$ care trebuie comparate. În cazul radarului sau sonarului $x[n]$ poate reprezenta semnalul discret transmis, iar $y[n]$, semnalului recepționat. Dacă ținta este prezentă, semnalul recepționat $y[n]$ constă din suma dintre semnalul reflectat de țintă și zgomot, adică

$$y[n] = a\,x[n-D] + w[n], \qquad (2.82)$$

unde D – întârzierea introdusă în semnalul reflectat, a – un factor de atenuare și $w[n]$ – zgomot aditiv. Pe de altă parte, dacă nu există țintă în spațiul investigat, semnalul $y[n]$ constă numai din zgomot. Deoarece, în general, semnalul reflectat de țintă este "înecat" în zgomot, se pune problema detecției țintei, adică, de a decide, pe baza semnalului recepționat, dacă ținta este sau nu prezentă și, în caz afirmativ, să se găsească întârzierea D din care se poate determina distanța până la țintă. Inspecția vizuală a semnalului $y[n]$ nu relevă prezența sau absența semnalului $ax[n-D]$. Operația de corelație între semnalul transmis și cel recepționat oferă un mijloc de a decide prezența sau lipsa țintei.

O altă aplicație a corelației, întâlnită adesea în comunicațiile digitale, constă în detecția între două alternative. În acest caz semnalul recepționat este de forma

$$y[n] = x_i[n] + w[n], \quad i = 0\,,1\,; \;\; 0 \le n \le L-1 \qquad (2.83)$$

unde $x_0[n]$ și $x_1[n]$ reprezintă, de exemplu, "0" logic, respectiv, "1" logic. Efectuând corelațiile semnalului recepționat cu cele două semnale $x_0[n]$ și $x_1[n]$ generate local la recepție, se poate lua decizia care din cele două semnale $x_0[n]$ sau $x_1[n]$ este prezent în semnalul recepționat.

În cele ce urmează se va defini operația de corelație și autocorelație pentru semnale de energie finită și pentru semnale de putere finită.

2.5.1. Corelația și autocorelația secvențelor de energie finită

Fie $x[n]$ și $y[n]$ două semnale de energie finită. Secvența de corelație dintre $x[n]$ și $y[n]$ este o secvență $r_{xy}[l]$ definită cu relația

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,y[n-l], \qquad l = 0\,; \pm 1\,; \pm 2\,; \ldots \qquad (2.84)$$

sau, echivalent

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+l]\,y[n], \qquad l = 0\,; \pm 1\,; \pm 2\,; \ldots \qquad (2.85)$$

Ordinea indicilor x și y indică direcția în care o secvență este deplasată față de cealaltă. În relația (2.84) $x[n]$ este nedeplasată și $y[n]$ este deplasată față de $x[n]$ cu l unități, spre dreapta pentru l pozitiv și spre stânga pentru l negativ. În (2.85) $y[n]$ este nedeplasată și $x[n]$ este deplasată cu l unități spre stânga pentru l pozitiv și spre dreapta, dacă l este negativ.

Deplasarea lui $x[n]$ spre stânga cu l unități față de $y[n]$ echivalează cu deplasarea lui $y[n]$ spre dreapta față de $x[n]$ cu l unități, astfel încât $r_{xy}[l]$ obținut din (2.84) și (2.85) este același.

Dacă se inversează rolurile lui $x[n]$ și $y[n]$ se obține

$$r_{yx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\,x[n-l] \tag{2.86}$$

sau

$$r_{yx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n+l]\,x[n] \tag{2.87}$$

Comparând (2.84) cu (2.87) sau (2.85) cu (2.86), rezultă

$$r_{xy}[l] = r_{yx}[-l] \tag{2.88}$$

Cu excepția operației de reflectare, calculul corelației implică aceleași operații ca și convoluția: deplasarea unei secvențe, multiplicarea și sumarea produselor, adică $r_{xy}[l]$ se obține din convoluția

$$r_{xy}[l] = x[l] * y[-l] \tag{2.89}$$

În cazul particular în care $y[n] = x[n]$ se obține *autocorelația*, definită ca

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,x[n-l] \tag{2.90}$$

sau, echivalent

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+l]\,x[n] \tag{2.91}$$

Din (2.90) și (2.91) rezultă $r_{xx}[l] = r_{xx}[-l]$, deci funcția de autocorelație este pară. Când se lucrează cu secvențe de durată finită, evident, sumele sunt finite, limitele de sumare fiind determinate de lungimea secvențelor implicate în corelație.

Pentru evidențierea unor proprietăți ale funcției de autocorelație și corelație se presupun două secvențe $x[n]$ și $y[n]$ de energie finită, și se formează combinația liniară

$$z[n] = a\,x[n] + b\,y[n-l] \tag{2.92}$$

Energia semnalului $z[n]$ este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\,a\;x[n]+b\;y[n-l]\,]^2 = a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]+b^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2[n-l]+$$

$$+\,2\,a\,b\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,y[n-l]=a^2\,r_{xx}[0]+b^2\,r_{yy}[0]+2\,a\,b\,r_{xy}[l] \qquad (2.93)$$

Fie

$$r_{xx}[0]=E_x \quad \text{și} \quad r_{yy}[0]=E_y \qquad (2.94)$$

energiile semnalelor $x[n]$ și $y[n]$.

Evident,

$$a^2\,r_{xx}[0]+b^2\,r_{yy}[0]+2\,a\,b\,r_{xy}[l]\geq 0 \qquad (2.95)$$

Presupunând $b\neq 0$ și împărțind (2.93) prin b^2, rezultă

$$r_{xx}[0]\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\,r_{xy}[l]\left(\frac{a}{b}\right)+r_{yy}[0]\geq 0 \qquad (2.96)$$

Această relație este adevărată dacă discriminantul său este mai mic sau egal cu zero, adică

$$r_{xy}^2[l]-r_{xx}[0]\,r_{yy}[0]\leq 0 \qquad (2.97)$$

Din (2.97) rezultă

$$\left|\,r_{xy}[l]\,\right|\leq\sqrt{r_{xx}[0]\,r_{yy}[0]}=\sqrt{E_x\,E_y} \qquad (2.98)$$

În cazul particular $y[n]=x[n]$, rezultă

$$\left|\,r_{xx}[l]\,\right|\leq r_{xx}[0]=E_x \qquad (2.99)$$

Aceasta înseamnă că funcția de autocorelație își atinge valoarea maximă în origine. În practică este uneori preferabil a se normaliza funcția de corelație și autocorelație la domeniul $[-1,\ 1]$.

Funcția de corelație normalizată, numită uneori și *coeficient de corelație,* se calculează cu relația

$$\rho_{xy}[l]=\frac{r_{xy}[l]}{\sqrt{r_{xx}[0]\,r_{yy}[0]}} \qquad (2.100)$$

Funcția de autocorelație normalizată, numită uneori și *coeficient de autocorelație,* se calculează cu relația

$$\rho_{xx}[l]=\frac{r_{xx}[l]}{r_{xx}[0]} \qquad (2.101)$$

Evident, $\left|\rho_{xy}[l]\right|\leq 1$ și $\left|\rho_{xx}[l]\right|\leq 1$.

2.5.2. Corelația secvențelor de putere finită

Fie $x[n]$ și $y[n]$ două secvențe de putere finită. Funcția lor de corelație este definită prin relația

$$r_{xy}[l] = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x[n]\, y[n-l] \qquad (2.102)$$

Dacă $x[n] = y[n]$, se obține funcția de autocorelație

$$r_{xx}[l] = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x[n]\, x[n-l] \qquad (2.103)$$

Dacă, în particular, $x[n]$ și $y[n]$ sunt periodice, de perioadă *N*, mediile din (2.102) și (2.103) sunt identice cu cele pe o perioadă și atunci se poate scrie

$$r_{xy}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, y[n-l] \qquad (2.104)$$

$$r_{xx}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, x[n-l] \qquad (2.105)$$

Secvențele $r_{xy}[l]$ și $r_{xx}[l]$ sunt periodice, de perioadă *N*. Factorul $\frac{1}{N}$ poate fi considerat factor de normalizare.

Exemplul 2.14.

Fie secvența

$$y[n] = x[n] + w[n] \qquad (2.106)$$

unde $x[n]$ este o secvență periodică de perioadă necunoscută N, iar $w[n]$ zgomotul aditiv, presupus alb.

Considerând M eșantioane prelevate din $y[n]$, adică $0 \le n \le M-1$, cu $M >> N$ și presupunând $y[n] = 0$ pentru $n < 0$ și $n > M$, funcția de autocorelație pentru $y[n]$ este

$$r_{yy}[l] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} y[n]\, y[n-l] \qquad (2.107)$$

Înlocuind (2.106) în (2.107), rezultă

$$r_{yy}[l] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} (x[n] + w[n])(x[n-l] + w[n-l]) = r_{xx}[l] + r_{xw}[l] + r_{wx}[l] + r_{ww}[l] \qquad (2.108)$$

unde $r_{xx}[l]$ este funcția de autocorelație a semnalului $x[n]$, $r_{xw}[l]$ și $r_{wx}[l]$ funcțiile de corelație dintre semnal și zgomotul aditiv, iar $r_{ww}[l]$ funcția de autocorelație a zgomotului.
Deoarece $x[n]$ s-a presupus periodic, de perioadă N, și funcția sa de autocorelație va fi periodică, având maxime locale pentru l = 0, N, $2N$, ... Funcțiile de corelație $r_{xw}[l]$ și $r_{wx}[l]$ dintre semnal și zgomot sunt mici datorită independenței dintre cele două semnale.
Funcția de autocorelație a zgomotului va avea un maxim în origine tinzând apoi asimptotic la valoarea sa medie [15].

În concluzie, în (2.108) este de așteptat ca numai $r_{xx}[l]$ să aibă maxime semnificative pentru $l \geq 0$, ceea ce permite detecția semnalului periodic $x[n]$ "înecat" în zgomot și determinarea perioadei sale.

2.5.3. Corelația dintre intrarea și ieșirea unui sistem

În paragraful de față se urmărește obținerea unor relații intrare – ieșire pentru sisteme discrete, liniare, invariante în timp în "domeniul corelației", deoarece semnalul obținut la ieșirea sistemului nu este arbitrar, necorelat și independent de semnalul de intrare.
Fie un semnal $x[n]$, a cărui funcție de autocorelație $r_{xx}[l]$ este cunoscută, care se aplică la intrarea unui SDLIT caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$. Semnalul de ieșire este

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{2.109}$$

Secvența de intercorelație dintre intrare și ieșire este

$$r_{yx}[l] = y[l] * x[-l] = h[l] * [x[l] * x[-l]] = h[l] * r_{xx}[l] \tag{2.110}$$

adică convoluția dintre răspunsul la impuls al sistemului și funcția de autocorelație a secvenței de intrare.

Din (2.88) și (2.110) rezultă

$$r_{xy}[l] = h[-l] * r_{xx}[l] \tag{2.111}$$

Ținând cont de (2.89), (2.109) și proprietățile convoluției, funcția de autocorelație a secvenței de ieșire este

$$\begin{gathered} r_{yy}[l] = y[l] * y[-l] = [h[l] * x[l]] * [h[-l] * x[-l]] = \\ [h[l] * h[-l]] * [x[l] * x[-l]] = r_{hh}[l] * r_{xx}[l] \end{gathered} \tag{2.112}$$

Funcția de autocorelație $r_{hh}[l]$ a răspunsului la impuls $h[n]$ există, dacă sistemul este stabil. Evaluând (2.112) pentru l=0, se obține energia semnalului de ieșire cu ajutorul funcțiilor de autocorelație.

$$r_{yy}[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{hh}[k] r_{xx}[k] \qquad (2.113)$$

2.6. Sisteme discrete, liniare, invariante în timp, caracterizate de ecuații cu diferențe cu coeficienți constanți

2.6.1. Soluția ecuației liniare cu diferențe cu coeficienți constanți

În paragraful 2.4.3 au fost considerate SDLIT și s-a arătat că acestea pot fi complet caracterizate de răspunsul lor la impuls. De asemenea, a fost prezentată și o altă manieră de descriere a relației intrare – ieșire pentru această familie de sisteme discrete, și anume, prin ecuația cu diferențe exprimată de relația

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (2.114)$$

Dată fiind ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți care caracterizează un sistem discret, liniar, invariant în timp, în acest paragraf se urmărește a se obține o expresie explicită pentru ieșirea $y[n]$, printr-o metodă numită *directă*. O metodă alternativă, numită *indirectă,* bazată pe folosirea transformatei Z va fi prezentată în paragraful 3.6.2.

Ca și în cazul ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, o ecuație liniară cu diferențe are soluția [3]

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n] \qquad (2.115)$$

unde $y_p[n]$ reprezintă o *soluție particulară a ecuației complete*, iar $y_h[n]$ *soluția generală a ecuației cu diferențe omogene* ($x[n-k]=0$ pentru $k = \overline{0,M}$).

Soluția generală a ecuației cu diferențe omogene

Prin impunerea intrării egală cu zero se obține *ecuația cu diferențe omogenă*

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = 0\,,\ \ a_0=1 \tag{2.116}$$

Se alege o soluție a ecuației omogene de forma

$$y[n] = \lambda^n \tag{2.117}$$

Înlocuind (2.117) în (2.116), se obține

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, \lambda^{n-k} = 0 \tag{2.118}$$

sau $$\lambda^{n-N}\left(\lambda^N + a_1\,\lambda^{N-1} + a_2\,\lambda^{N-2} + \ldots + a_{N-1}\,\lambda + a_N\right) = 0 \tag{2.118'}$$

Ecuația (2.118) sau (2.118') se numește *ecuație caracteristică*, iar polinomul din paranteză se numește *polinom caracteristic* al sistemului, care are N rădăcini notate $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, care pot fi reale și/sau complexe, distincte sau nu. Dacă coeficienții $a_1, \ldots, a_N$ sunt reali, cum se întâmplă de obicei în practică, rădăcinile sunt fie reale, fie reale și/sau perechi complex conjugate. Unele rădăcini pot fi identice, caz în care rădăcinile se numesc multiple. Pentru început însă, se presupune că acestea sunt distincte.

Soluția generală a ecuației cu diferențe omogene este [3]

$$y_h[n] = c_1\,\lambda_1^n + c_2\,\lambda_2^n + \ldots + c_N\,\lambda_N^n \tag{2.119}$$

unde $c_1, c_2, \ldots, c_N$ sunt coeficienți de ponderare, care se determină din condițiile inițiale specificate pentru sistem. Deoarece $x[n]=0$, relația (2.119) poate fi folosită pentru determinarea *răspunsului de intrare zero* $y_{zi}[n]$ al sistemului, coeficienții de ponderare determinându-se din condițiile inițiale $y[-1], y[-2], \ldots, y[-N]$.

Exemplul 2.15.

Să se determine răspunsul sistemului cauzal descris de ecuația cu diferențe omogenă

$$y[n] - 3\,y[n-1] - 4\,y[n-2] = 0 \tag{2.120}$$

cu condițiile inițiale $y[-1]$ și $y[-2]$.

Soluție. Ecuația caracteristică este $\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 4$, astfel încât forma generală a soluției ecuației cu diferențe, omogene este

$$y_h[n] = c_1\,\lambda_1^n + c_2\,\lambda_2^n = c_1\,(-1)^n + c_2\,4^n \tag{2.121}$$

Constantele c_1 și c_2 se obțin din condițiile inițiale $y[-1]$ și $y[-2]$. Din ecuația (2.120) se obține

$$\begin{aligned} y[0] &= 3\,y[-1] + 4\,y[-2] \\ y[1] &= 3\,y[0] + 4\,y[-1] = 13\,y[-1] + 12\,y[-2] \end{aligned} \tag{2.122}$$

Pe de altă parte, din (2.121) se poate scrie

$$\begin{aligned} y[0] &= c_1 + c_2 \\ y[1] &= -c_1 + 4\,c_2 \end{aligned} \tag{2.123}$$

Înlocuind (2.123) în (2.122), rezultă

$$c_1 = -\frac{1}{5}\,y[-1] + \frac{4}{5}\,y[-2]$$

$$c_2 = \frac{16}{5}\,y[-1] + \frac{16}{5}\,y[-2]$$

și răspunsul de intrare zero al sistemului va fi

$$y_{zi}[n] = \left[-\frac{1}{5}\,y[-1] + \frac{4}{5}\,y[-2]\right](-1)^n + \left[\frac{16}{5}\,y[-1] + \frac{16}{5}\,y[-2]\right]4^n\ ; \quad n \geq 0 \tag{2.124}$$

Dacă ecuația caracteristică are rădăcina λ_1 multiplă de ordin m, iar celelalte rădăcini, $\lambda_{m+1},\dots,\lambda_N$, simple, soluția generală a ecuației cu diferențe omogene este [3]

$$y_h[n] = c_1\,\lambda_1^n + c_2\,n\lambda_1^n + c_3\,n^2\,\lambda_1^n + \dots + c_m\,n^{m-1}\,\lambda_1^n + c_{m+1}\,\lambda_{m+1}^n + \dots + c_N\,\lambda_N^n\,. \tag{2.125}$$

În cazul rădăcinilor complex conjugate și coeficienții corespunzători sunt complex conjugați și contribuția acestora se combină într-o componentă reală. Astfel, dacă λ_p și λ_q sunt cele două rădăcini complex conjugate

$$\begin{aligned} \lambda_p &= r(\cos\alpha + j\sin\alpha) \\ \lambda_q &= r(\cos\alpha - j\sin\alpha) \end{aligned} \tag{2.126}$$

contribuția lor în răspuns este

$$\begin{aligned} c_p\lambda_p^n &= c_p r^n(\cos n\alpha + j\sin n\alpha) \\ c_q\lambda_q^n &= c_q r^n(\cos n\alpha - j\sin n\alpha) \end{aligned} \tag{2.127}$$

unde coeficienții c_p și c_q sunt complex conjugați

$$c_p = ce^{j\theta}; \quad c_q = ce^{-j\theta} \tag{2.128}$$

cu $c = |c_p| = |c_q|$.

Ținând seama de (2.128), termenii din relația (2.127) se combină în componenta

$$c_p r^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha) + c_q r^n (\cos n\alpha - j \sin n\alpha) = \\ = r^n (A_k \cos n\alpha + B_k \sin n\alpha) \quad (2.129)$$

unde

$$A_k = 2c \cos\theta \\ B_k = -2c \sin\theta \quad (2.130)$$

Dacă ecuația caracteristică are N_1 rădăcini reale distincte și $(N-N_1)/2$ perechi de rădăcini complex conjugate, soluția este de forma

$$y_h[n] = \sum_{k=1}^{N_1} c_k \lambda_k^n + \sum_{k=1}^{\frac{N-N_1}{2}} r^n (A_k \cos n\alpha + B_k \sin n\alpha) \quad (2.131)$$

Dacă unele rădăcini reale sau complex conjugate sunt multiple, în răspuns apar și termeni de forma (2.125).

Soluția particulară a ecuației cu diferențe

Soluția particulară se obține presupunând o anumită formă pentru aceasta, în funcție de semnalul de intrare [23]. În tabelul 2.1 sunt prezentate soluții particulare pentru cele mai uzuale semnale folosite în practica prelucrării numerice a semnalelor.

Tabelul 2.1

Semnal de intrare $x[n]$	**Soluție particulară** $y_p[n]$
A (constant)	K
$A\ M^n$	$k\ M^n$
$A\ n^M$	$k_0\ n^M + k_1\ n^{M-1} + ... + k_M$
$A^n\ n^M$	$A^n \left(k_0\ n^M + k_1\ n^{M-1} + ... + k_M\right)$
$\left\{\begin{matrix} A\ \cos\omega_0 n \\ A\ \sin\omega_0 n \end{matrix}\right\}$	$k_1 \cos\omega_0 n + k_2 \sin\omega_0 n$
$\delta[n]$	$\sum_{i=0}^{M-N} k_i \delta[n-i]$

Exemplul 2.16.

Să se determine soluția particulară a ecuației cu diferențe

$$y[n]=\frac{5}{6}\,y[n-1]-\frac{1}{6}\,y[n-2]+x[n] \qquad (2.126)$$

la semnalul de intrare $x[n]=2^n$, $n\geq 0$.

Soluția particulară este

$$y_p[n]=k\cdot 2^n u[n] \qquad (2.127)$$

Substituind (2.127) în (2.126), se obține

$$k\,2^n\,u[n]=\frac{5}{6}\,k\,2^{n-1}\,u[n-1]-\frac{1}{6}\,k\,2^{n-2}\,u[n-2]+2^n\,u[n]$$

Pentru a determina pe *k*, ecuația precedentă se evaluează pentru $n\geq 2$.

$$4\,k=\frac{5}{6}(2\,k)-\frac{1}{6}\,k+4 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{8}{5}$$

Soluția particulară este

$$y_p[n]=\frac{8}{5}\,2^n\ , \quad n\geq 0\,.$$

Soluția totală a ecuației liniare cu diferențe și răspunsul de stare zero al sistemului

Soluția totală se obține prin sumarea soluției generală a ecuației omogene cu o soluție particulară a ecuației complete, adică

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n] \qquad (2.128)$$

Suma rezultată $y[n]$, pentru $n\geq 0$, conține constantele c_k ale soluției ecuației omogene, care se determină din primele eșantione ale ieșirii calculate iterativ astfel încât sistemul să satisfacă condițiile inițiale date $y[-1],y[-2],...,y[-N]$.

Datorită liniarității sistemului, răspunsul $y[n]$ poate fi determinat și cu relația

$$y[n]=y_{zs}[n]+y_{zi}[n] \qquad (2.129)$$

unde $y_{zs}[n]$ este numit *răspuns de stare zero*, iar $y_{zi}[n]$, *răspuns de intrare zero.* Răspunsul de stare zero se determină rezolvând ecuația cu diferențe în condiții inițiale nule. Așa cum s-a mai precizat, răspunsului de intrare zero se deduce din ecuația omogenă, ținând cont de condițiile inițiale $y[-1],y[-2],...,y[-N]$.

Exemplul 2.17.

Se consideră un sistem recursiv descris de ecuația

$$y[n]=a\;y[n-1]+x[n] \qquad (2.130)$$

unde a – constantă. Pentru acest sistem se dorește aflarea semnalului de ieșire în condițiile în care se presupune că la intrarea sistemului se aplică semnalul, pentru $n \geq 0$, fără a face vreo presupunere asupra intrării pentru $x[n]$ $n < 0$, dar presupunând cunoscută valoarea $y[-1]$, adică condiția inițială. Caz particular $x[n] = 2^n u[n]$.

Semnalul de ieșire poate fi obținut prin mai multe metode, și anume: folosind relația (2.128), folosind relația (2.129) și, pentru acest caz simplu al unei ecuații cu diferențe de ordinul întâi, prin recurență.

1. Ecuația cu diferențe omogenă este

$$y[n] - ay[n-1] = 0 \tag{2.131}$$

Ecuația caracteristică este $\lambda - a = 0$, cu rădăcina $\lambda = a$. Soluția ecuației omogene este $y_h[n] = c_1 a^n$ (2.132)

Soluția particulară a ecuației neomogene este de forma $y_p[n] = k2^n u[n]$. Înlocuind soluția particulară în ecuația cu diferențe și apoi evaluând-o pe aceasta pentru n=1, rezultă $k = \dfrac{2}{2-a}$.

$$y_p[n] = \frac{2}{2-a} 2^n, n \geq 0 \tag{2.133}$$

Conform relației (2.128), soluția generală este

$$y[n] = c_1 a^n + \frac{2}{2-a} 2^n, n \geq 0 \tag{2.134}$$

Evaluând (2.130) și (2.134) în n=0 și egalând cele două relații, se obține $c_1 = ay[-1] - \dfrac{a}{2-a}$.

$$y[n] = a^{n+1} y[-1] + \frac{1}{2-a}(2^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \geq 0 \tag{2.135}$$

2. Răspunsul de intrare zero este

$$y_{zi}[n] = c_1^{'} a^n \tag{2.136}$$

Evaluând (2.131) și (2.136) în n=0, apoi egalând relațiile, rezultă $c_1^{'} = ay[-1]$.

$$y_{zi}[n] = a^{n+1} y[-1] \tag{2.137}$$

Răspunsului de stare zero este de forma

$$y_{zs}[n] = c_1^{''} a^n + \frac{2}{2-a} 2^n, n \geq 0 \tag{2.138}$$

Constanta $c_1^{"}$ se determină prin evaluarea relațiilor (2.138) și (2.130) în n=0 cu condiția inițială nulă. Rezultă astfel $c_1^{"} = -\frac{a}{2-a}$.

$$y_{zs}[n] = \frac{1}{2-a}(2^{n+1} - a^{n+1}), n \geq 0 \qquad (2.139)$$

Înlocuind (2.137) și (2.139) în (2.129), se obține soluția totală de aceeași forma cu cea dată de (2.135).

3. Plecând de la (2.130), se poate scrie

$$\begin{aligned}
&y[0] = a\ y[-1] + x[0] \\
&y[1] = a\ y[0] + x[1] = a^2\ y[-1] + a\ x[0] + x[1] \\
&y[2] = a\ y[1] + x[2] = a^3\ y[-1] + a^2\ x[0] + a\ x[1] + x[2] \\
&\vdots \\
&y[n] = a\ y[n-1] + x[n] = a^{n+1}\ y[-1] + a^n\ x[0] + a^{n-1}\ x[1] + \ldots \\
&+ a\ x[n-1] + x[n]
\end{aligned} \qquad (2.141)$$

sau, mai compact

$$y[n] = a^{n+1}\ y[-1] + \sum_{k=0}^{n} a^k\ x[n-k], \quad n \geq 0 \qquad 2.142)$$

Particularizând (2.142) pentru semnalul de intrare considerat, se obține răspunsul total al sistemului, evident, de aceeași formă cu (2.135).

Se observă că răspunsul $y[n]$ dat de (2.142) conține doi termeni: primul, care îl conține pe $y[-1]$, este un rezultat al condiției inițiale, iar al doilea termen se datorează semnalului de intrare $x[n]$.

Dacă sistemul este inițial relaxat la momentul $n = 0$, memoria sa ar trebui să fie zero, deci $y[-1] = 0$. Pentru sistemul descris de (2.130) răspunsul de stare zero sau răspunsul forțat este

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k\ x[n-k], \quad n \geq 0 \qquad (2.143)$$

În continuare, se presupune sistemul inițial nerelaxat ($y[-1] \neq 0$) și intrarea $x[n] = 0$ pentru toți *n*. Răspunsul de intrare zero sau răspunsul natural al sistemului este

$$y_{zi}[n] = a^{n+1}\ y[-1], \quad n \geq 0 \qquad (2.144)$$

adică un sistem recursiv cu condiții inițiale nenule produce un semnal de ieșire fără a avea excitație, acesta datorându-se memoriei sistemului.

Sistemul descris de (2.130) este cel mai simplu sistem recursiv din clasa sistemelor recursive descrise de ecuații liniare cu diferențe cu coeficienți constanți. Forma generală pentru o astfel de ecuație este dată de relația

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k], \quad a_0 \equiv 1 \tag{2.145}$$

Ordinul ecuației cu diferențe sau ordinul sistemului este egal cu N.
Ecuația (2.145) exprimă ieșirea sistemului la momentul n direct ca o sumă ponderată a intrării prezente și a valorilor anterioare ale intrării și ieșirii. Pentru a determina ieșirea $y[n]$ pentru $n \geq 0$ este necesară cunoașterea intrării $x[n]$ și condițiile inițiale $y[-1], y[-2], ..., y[-N]$. Acestea sintetizează "istoria" sistemului necesară aflării ieșirii prezente și viitoare.

Exemplul 2.18.

Să se determine soluția totală a ecuației cu diferențe

$$y[n] = \frac{5}{6} y[n-1] - \frac{1}{6} y[n-2] + x[n] \tag{2.146}$$

când semnalul de intrare este $x[n] = 2^n$, $n \geq 0$ și $\begin{cases} y[-1] = 1 \\ y[-2] = 2 \end{cases}$.

Se determină întâi soluția ecuației omogene

$$\lambda^n - \frac{5}{6} \lambda^{n-1} + \frac{1}{6} \lambda^{n-2} = 0$$

$$\lambda^{n-2} \left[\lambda^2 - \frac{5}{6} \lambda + \frac{1}{6} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

Forma generală a soluției ecuației omogene cu diferențe este

$$y_h[n] = c_1\, \lambda_1^n + c_2\, \lambda_2^n = c_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

Din exemplul 2.16, soluția particulară a acestui sistem la intrarea $x[n]$ este dată de (2.127) cu $k = \frac{8}{5}$.

Soluția totală este

$$y[n] = c_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{8}{5} 2^n, \quad n \geq 0 \tag{2.147}$$

unde constantele c_1 și c_2 se determină astfel încât să satisfacă condițiile inițiale.
Din (2.146) rezultă

$$\begin{aligned} y[0] &= \frac{5}{6}y[-1]-\frac{1}{6}y[-2]+1 \\ y[1] &= \frac{5}{6}y[0]-\frac{1}{6}y[-1]+2=\frac{19}{36}y[-1]-\frac{5}{36}y[-2]+\frac{17}{6} \end{aligned} \tag{2.148}$$

Din (2.147) se obține

$$\begin{aligned} y[0] &= c_1+c_2+\frac{8}{5} \\ y[1] &= c_1\cdot\frac{1}{2}+c_2\cdot\frac{1}{3}+\frac{16}{5} \end{aligned} \tag{2.149}$$

Introducând (2.149) în (2.148) rezultă c_1 și c_2 în funcție de condițiile inițiale $y[-1]$ și $y[-2]$.

$$\begin{aligned} c_1+c_2 &= -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2 &= -\frac{7}{60} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad c_1=-\frac{1}{2};\quad c_2=\frac{2}{5}$$

$$y[n]=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{8}{5}2^n\ ,\quad n\geq 0 \tag{2.150}$$

Pe de altă parte, răspunsul total al sistemului se mai poate obține din sumarea răspunsului de stare zero cu răspunsul de intrare zero.

$$y[n]=y_{zs}[n]+y_{zi}[n] \tag{2.151}$$

Răspunsul de stare zero se obține din (2.147), prin evaluarea coeficienților în condiții inițiale nule.

$$\left.\begin{aligned} c'_1+c'_2+\frac{8}{5} &= 1 \\ \frac{1}{2}c'_1+\frac{1}{3}c'_2+\frac{16}{5} &= \frac{17}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c'_1=-1;\quad c'_2=\frac{2}{5}$$

$$y_{zs}[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{8}{5}2^n \tag{2.152}$$

Răspunsul de intrare zero se obține din rezolvarea ecuației omogene și folosirea condițiilor inițiale

$$y_h[n] = c''_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c''_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$y[n] - \frac{5}{6} y[n-1] + \frac{1}{6} y[n-2] = 0 \tag{2.153}$$

$$\begin{cases} y[0] = c''_1 + c''_2 \\ y[1] = \frac{1}{2} c''_1 + \frac{1}{3} c''_2 \end{cases} \tag{2.154}$$

$$\begin{cases} y[0] = \frac{5}{6} y[-1] - \frac{1}{6} y[-2] \\ y[1] = \frac{19}{36} y[-1] - \frac{5}{36} y[-2] \end{cases} \tag{2.155}$$

Din egalarea ecuației (2.155) cu (2.154) rezultă $c''_1 = \frac{1}{2}$, $c''_2 = 0$ și

$$y_{zi}[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{2.156}$$

Răspunsul total al sistemului se obține din sumarea răspunsurilor de stare zero și de intrare zero, adică, în cazul exemplului considerat

$$y[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8}{5} 2^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8}{5} 2^n \tag{2.157}$$

Evident, $y[n]$ obținut cu relația (2.157) este identic cu cel dat de (2.150) obținut pe baza soluției ecuației omogene și a soluției particulare, cu constantele c_1 și c_2 determinate corespunzător.

2.6.2. Răspunsul la impuls al sistemelor discrete, liniare, invariante în timp

Răspunsul la impuls al unui sistem discret, liniar, invariant în timp, relaxat a fost definit ca răspunsul sistemului la excitația impuls unitate. În cazul sistemelor recursive, răspunsul la impuls este egal cu răspunsul de stare zero, când intrarea este $x[n] = \delta[n]$.

De exemplu, în cazul sistemului recursiv de ordinul întâi din exemplul 2.17, răspunsul de stare zero este

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \quad n \geq 0. \tag{2.158}$$

care, particularizat pentru $x[n] = \delta[n]$, este

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k \delta[n-k] = a^n, \quad n \geq 0. \tag{2.159}$$

În concluzie, răspunsul la impuls al sistemului recursiv, de ordinul întâi, descris de (2.130), este

$$h[n] = a^n u[n] \tag{2.160}$$

Ținând cont de (2.160) și (2.158), se observă că răspunsul de stare zero este convoluția dintre răspunsul la impuls al sistemului și semnalul cauzal de intrare.

În cazul general al unui sistem arbitrar, liniar, invariant în timp, recursiv, cauzal, răspunsul de stare zero la un semnal de intrare cauzal este

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k] x[n-k], \quad n \geq 0. \tag{2.161}$$

Când semnalul de intrare este impulsul unitate, ($x[n] = \delta[n]$), (2.161) devine

$$y_{zs}[n] = h[n]. \tag{2.162}$$

Pentru a determina răspunsul la impuls al unui sistem discret descris de o ecuație liniară cu diferențe, cu coeficienți constanți se face apel la paragraful 2.6.1, conform căruia, răspunsul total al unui astfel de sistem este suma dintre soluția ecuației omogene și o soluție particulară a ecuației generale. Soluția particulară este dată în tabelul 2.1. Pentru cazul în care N>M, soluția particulară este egală cu zero și răspunsul la impuls constă numai din soluția ecuației omogene, cu coeficienții c_k din (2.119) evaluați astfel încât să satisfacă condițiile inițiale dictate de impuls.

Exemplul 2.19.

Să se determine răspunsul la impuls $h[n]$ al sistemului descris de ecuația cu diferențe de ordinul doi

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] \tag{2.163}$$

În exemplul 2.15 s-a determinat soluția ecuației cu diferențe omogene pentru acest sistem de forma

$$y_h[n] = (c_1(-1)^n + c_2 4^n)u[n] \tag{2.164}$$

Cum pentru intrarea $x[n] = \delta[n]$, soluția particulară este zero, răspunsul la impuls al sistemului este dat de (2.164), unde c_1 și c_2 sunt evaluate să satisfacă relația (2.163).

Pentru n=0 și n=1, (2.163) devine

$$\begin{aligned} y[0] &= 1 \\ y[1] &= 5 \end{aligned} \tag{2.165}$$

în condițiile $y[-1] = y[-2] = 0$, deoarece sistemul trebuie să fie relaxat.

Evaluând (2.164) în n=0 și n=1, se obține

$$\begin{aligned} y[0] &= c_1 + c_2 \\ y[1] &= -c_1 + 4c_2 \end{aligned} \tag{2.166}$$

Din (2.165) și (2.166) rezultă c_1=-1/5, c_2=6/5. Răspunsul la impuls al sistemului este

$$h[n] = \left[-\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{5}{6}4^n \right] u[n] \tag{2.167}$$

Pentru o ecuație liniară cu diferențe, cu coeficienți constanți răspunsul la impuls este de forma soluției ecuației omogene

$$h[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \lambda_k^n \tag{2.168}$$

unde rădăcinile polinomului caracteristic s-au presupus distincte. Coeficienții c_k se determină din condiții inițiale nule $y[-1] = y[-2] = ... = y[-N] = 0$.

Exprimarea răspunsului la impuls în forma (2.168) permite stabilirea unei legături între rădăcinile polinomului caracteristic și stabilitatea în sens MIME a sistemului, după cum urmează

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| h[n] \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} c_k \lambda_k^n \right| \le \sum_{k=1}^{N} \left| c_k \right| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \lambda_k \right|^n \tag{2.169}$$

Dacă $\left|\lambda_k\right| < 1, \forall k = \overline{1,N} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left|\lambda_k\right|^n < \infty$, și, deci, $\sum_{n=0}^{\infty} \left|h[n]\right| < \infty$.

Pe de altă parte, dacă una sau mai multe din mărimile $\left|\lambda_k\right| \ge 1, h[n]$ nu mai este absolut sumabil și, în consecință, sistemul este instabil. Prin urmare, o condiție necesară și suficientă pentru stabilitatea sistemelor cauzale recursive descrise prin ecuații liniare cu diferențe cu coeficienți constanți este ca rădăcinile polinomului caracteristic să fie subunitare în modul.

2.7. Probleme propuse

2.1. Un semnal discret $x[n]$ este definit sub forma

$$x[n] = \begin{cases} 1 + \dfrac{n}{3} & , \quad -3 \le n \le -1 \\ 1 & , \quad 0 \le n \le 3 \\ 0 & , \quad \text{în rest}. \end{cases}$$

a) Să se determine valorile semnalului și să se reprezinte $x[n]$;
b) Să se reprezinte semnalul care rezultă dacă
   1) întâi se reflectă $x[n]$, apoi se întârzie semnalul rezultat cu 4 eșantioane;
   2) întâi se întârzie $x[n]$ cu 4 eșantioane, apoi se reflectă semnalul rezultat.
c) Să se reprezinte semnalul $x[-n+4]$;
d) Să se compare rezultatele de la pct. b) și c). Cum se poate obține $x[-n+4]$ din $x[n]$?
e) Să se exprime $x[n]$ în funcție de semnalele $\delta[n]$ și $u[n]$.

2.2. Un semnal discret $x[n]$ este reprezentat în figura p2.2. Să se calculeze și să se reprezinte fiecare din următoarele semnale

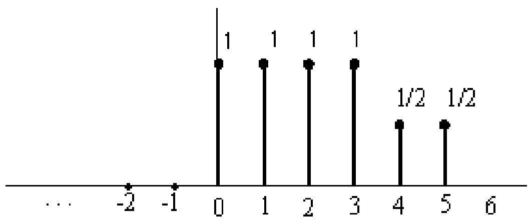

Figura p2.2.

a) $x[n-2]$;
b) $x[4-n]$;
c) $x[n+2]$;
d) $x[n]u[2-n]$;
e) $x[n-1]\delta[n-3]$;

f) $x\left[n^2\right]$;

g) partea pară a lui $x[n]$;

h) partea impară a lui $x[n]$.

2.3. Să se arate că orice semnal poate fi descompus într-o parte pară și una impară. Este această descompunere unică ? Ilustrați argumentația utilizând semnalul

$$x[n] = \{2, 3, \underset{\uparrow}{4}, 5, 6\}$$

2.4. Fie sistemul $y[n] = H[x[n]] = x\left[n^2\right]$.

a) Să se determine dacă este invariant în timp;

b) Se aplică sistemului semnalul

$$x[n] = \begin{cases} 1\,, & 0 \le n \le 3 \\ 0\,, & \text{în rest}\,. \end{cases}$$

   1) să se reprezinte $x[n]$;
   2) să se determine și să se reprezinte $y[n] = H[x[n]]$;
   3) să se reprezinte $y_2'[n] = y[n-2]$;
   4) să se determine și să se reprezinte $x_2[n] = x[n-2]$;
   5) să se determine și să se reprezinte semnalul $y_2[n] = H[x_2[n]]$;
   6) să se compare semnalele $y_2[n]$ cu $y[n-2]$. Ce concluzie rezultă ?

c) Să se repete pct. b) pentru sistemul $y[n] = x[n] - x[n-1]$;

d) Să se repete pct. b) pentru sistemul $y[n] = H[x[n]] = n\, x[n]$.

2.5. Un sistem discret poate fi

   1) static sau dinamic;
   2) liniar sau neliniar;
   3) invariant sau variant în timp;
   4) cauzal sau necauzal;
   5) stabil sau instabil.

Să se examineze următoarele sisteme din punctul de vedere al proprietăților de mai sus.

a) $y[n] = \cos[x[n]]$;

b) $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n+1} x[k]$;

c) $y[n]=x[n]\cos\omega_0 n$;

d) $y[n]=x[-n+2]$;

e) $y[n]=\text{Trun}[x[n]]$, unde $\text{Trun}[x[n]]$ reprezintă partea întreagă a lui $x[n]$ obținută prin trunchiere;

f) $\text{y[n]}=\text{Round}[x[n]]$, unde $\text{Round}[x[n]]$ reprezintă partea întreagă a lui $x[n]$ obținută prin rotunjire;

g) $y[n]=|x[n]|$;

h) $y[n]=x[n]u[n]$;

i) $y[n]=x[n]+n\,x[n+1]$;

j) $y[n]=x[2n]$;

k) $y[n]=x[-n]$.

2.6. Să se determine și să se reprezinte convoluția $y[n]$ a semnalelor

$$x[n]=\begin{cases}\frac{1}{3}n \;, & 0\le n\le 6\\ 0 \;, & \text{în rest}.\end{cases}$$

$$h[n]=\begin{cases}1 \;, & -2\le n\le 2\\ 0 \;, & \text{în rest}.\end{cases}$$

a) numeric;
b) grafic.

2.7. Să se calculeze convoluția $y[n]$ a următoarelor perechi de semnale:

a) $x[n]=\begin{cases}\alpha^n \;, & -3\le n\le 5\\ 0 \;, & \text{în rest}.\end{cases}$, $h[n]=\begin{cases}1 \;, & 0\le n\le 4\\ 0 \;, & \text{în rest}.\end{cases}$

b) $x[n]=a^n\,u[n]$

$h[n]=b^n\,u[n]$, pentru $\text{a}\ne\text{b}$ și $\text{a}=\text{b}$.

c) $x[n] = \begin{cases} 1\ , & n = -2,0,1 \\ 2\ , & n = -1 \\ 0\ , & \text{în rest.} \end{cases}$, $\quad h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-4] + \delta[n-5]$.

d) $x[n] = u[n+1] - u[n-4] - \delta[n-5]$, $\quad h[n] = [u[n+2] - u[n-3]](3 - |n|)$.

2.8. Fie $x[n]$, cu $N_1 \le n \le N_2$ și $h[n]$, $M_1 \le n \le M_2$, două semnale de durată finită.

a) Să se determine domeniul $L_1 \le n \le L_2$ al convoluției lor în funcție de N_1, N_2, M_1 și M_2;

b) Să se determine limitele domeniului convoluției în cazul în care cele două semnale se suprapun parțial în stânga, se suprapun complet și se suprapun parțial în dreapta. Se presupune $h[n]$ de durată mai mică decât $x[n]$.

c) Să se ilustreze rezultatele obținute calculând convoluția următoarelor semnale

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -2 \le n \le 4 \\ 0, & \text{în rest}. \end{cases}, \qquad h[n] = \begin{cases} 2\ , & -1 \le n \le 2 \\ 0\ , & \text{în rest}. \end{cases}$$

2.9. Să se determine răspunsul la impuls și la treapta unitate al sistemelor descrise de următoarele ecuații cu diferențe:

a) $y[n] = 0.6\, y[n-1] - 0.08\, y[n-2] + x[n]$;

b) $y[n] = 0.7\, y[n-1] - 0.1\, y[n-2] + 2\, x[n] - x[n-2]$.

2.10. Se consideră SDLIT interconectate ca în figura p2.10.

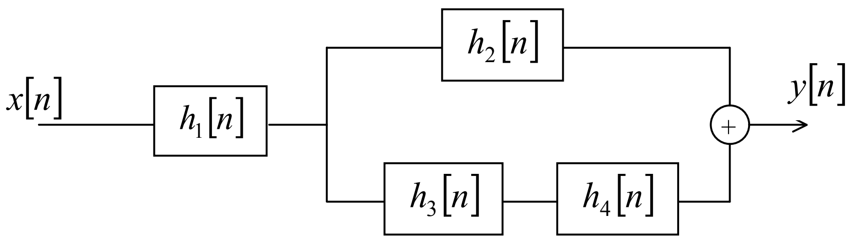

Figura p2.10.

a) Să se exprime răspunsul la impuls al întregului sistem în funcție de $h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$ și $h_4[n]$;

b) Să se determine $h[n]$, dacă $h_1[n]=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right\}$,
$h_2[n]=h_3[n]=(n+1)u[n],\ h_4[n]=\delta[n-2]$;

c) Să se determine răspunsul sistemului de la pct. b) dacă
$x[n]=\delta[n+2]+3\,\delta[n-1]-4\,\delta[n-3]$.

2.11. Să se determine răspunsul sistemului al cărui răspuns la impuls este $h[n]=a^n\ u[n]$ la semnalul de intrare $x[n]=u[n]-u[n-10]$.

2.12. Două semnale $s[n]$ și $v[n]$ sunt legate prin următoarea ecuație cu diferențe
$s[n]+a_1\ s[n-1]+\ldots+a_N\ s[n-N]=b_0\ v[n]$.

a) Să se deseneze implementarea
1) sistemului care generează $s[n]$ când este excitat cu $v[n]$;
2) sistemului care generează $v[n]$ când este excitat cu $s[n]$;

b) care este răspunsul la impuls al cascadei formate prin interconectarea sistemelor 1 și 2?

2.13. Un sistem discret are realizarea din figura p2.13.

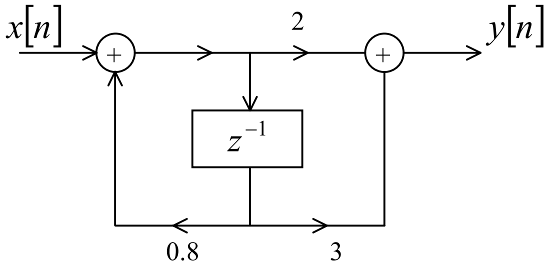

Figura p2.13.

a) Să se calculeze răspunsul la impuls al sistemului;

b) Să se implementeze sistemul invers, adică cel care produce ieșirea $x[n]$ pentru intrarea $y[n]$.

2.14. Să se determine răspunsul $y[n],\ n\geq 0$ al sistemului descris de ecuația cu diferențe de ordinul doi

$$y[n]-4\,y[n-1]+4\,y[n-2]=x[n]-x[n-1]$$
la intrarea $x[n]=(-1)^n\,u[n]$ și condițiile:

a) $y[-1]=y[-2]=0$

b) $y[-1]=1$; $y[-2]=-1$.

2.15. Să se determine răspunsul la impuls $h[n]$ al sistemului descris de ecuația cu diferențe de ordin doi
$$y[n]-4\,y[n-1]+4\,y[n-2]=x[n]-x[n-1].$$

2.16. Să se calculeze secvențele de corelație $r_{xx}[l]$, $r_{xy}[l]$ și $r_{yx}[l]$ ale următoarelor secvențe:
$$x[n]=\begin{cases}1\,, & n_0-N\le n\le n_0+N\\ 0\,, & \text{în rest}.\end{cases}\quad,\qquad y[n]=\begin{cases}1\,, & -N\le n\le N\\ 0\,, & \text{în rest}.\end{cases}$$

2.17. Să se determine secvența de autocorelație a următoarelor secvențe:

a) $x[n]=\{1,2,1,1\}$;

b) $y[n]=\{1,1,2,1\}$.

Ce concluzie se desprinde ?